

Міністерство освіти і науки України
Харківська національна академія міського господарства

Л.А. Назаренко

**ПЛАНУВАННЯ І ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ
ЕКСПЕРИМЕНТУ**

Конспект лекцій

**(для магістрів денної форми навчання
спеціальності 8.090605 – «Світлотехніка і джерела світла»)**

Харків – ХНАМГ – 2008

Конспект лекцій з курсу «Планування і обробка результатів експерименту» (для магістрів денної форми навчання спец. 8.090605 – «Світлотехніка і джерела світла»). Авт.: Назаренко Л.А. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 163 с.

Автор: Л.А. Назаренко

Рецензент: д.фіз.-матем.н., професор В.І. Карась

Рекомендовано кафедрою світлотехніки і джерел світла,
протокол № 6 від "18" грудня 2007р.

ЗМІСТ

1. Завдання і проблеми науки.....	5
1.1 Роль і місце науки в суспільстві.....	5
1.2 Моделювання.....	7
1.3 Основні поняття та принципи теорії моделювання.....	8
1.4 Інформаційний пошук.....	12
1.5 Етапи науково-технічного дослідження.....	13
1.6 Проблематика наукових досліджень.....	14
1.7 Методи проведення наукових досліджень.....	17
1.8 Тенденції розвитку науки.....	18
1.9 Державна науково-технічна політика.....	22
1.10 Задачі планування експерименту.....	29
2. Основні поняття теорії ймовірності.....	31
2.1 Числові характеристики випадкових величин.....	31
2.1.1 Точкові оцінки числових характеристик експериментальних законів розподілу.....	33
2.2 Інтервальні оцінки розподілу результатів спостережень і вимірювань.....	37
2.3 Довірчі інтервали для дисперсії і середнього квадратичного відхилення.....	42
2.4 Знаходження грубих похибок.....	45
3. Регресійний аналіз.....	46
3.1 Кореляційна залежність.....	46
3.2 Дві основні задачі вимірювання зв'язків.....	46
3.3 Емпірична лінія регресії.....	48
3.4 Метод найменших квадратів.....	50
3.5 Множинний регресійний аналіз.....	53
3.6 Нелінійна регресія.....	59
4. Активний експеримент.....	63
4.1 Ортогональні плани першого порядку.....	63

4.2 Повний факторний експеримент.....	67
4.3 Дисперсія відтворюваності.....	72
4.4 Оцінка адекватності апроксимуючої залежності об'єкту, що досліджується.....	73
4.5 Оцінка значущості коефіцієнтів апроксимуючої залежності взятій у вигляді алгебраїчного полінома, в сенсі відмінності значень цих коефіцієнтів від нуля.....	74
4.6 Обробка результатів експерименту.....	76
4.7 Дрібний факторний експеримент.....	89
4.8 Складання планів другого порядку.....	90
4.9 Ортогональні центральні-композиційні плани.....	92
5. Планування експерименту при відшукуванні експериментальної області.....	96
5.1 Класичні методи визначення екстремуму.....	97
5.2 Факторні методи визначення екстремуму.....	102
6. Дисперсійний аналіз при експериментальному дослідженні.....	113
6.1 Однофакторний дисперсійний аналіз.....	114
7. Приклади та завдання.....	125
8. Додатки.....	155
Література.....	162

1. ЗАВДАННЯ І ПРОБЛЕМИ НАУКИ

1.1 Роль і місце науки в суспільстві

Наука - слово багатозначне. Наука - форма творчої суспільної діяльності людини. Наука - явище світової культури.

Економіка будь-якої держави не може спиратися лише на матеріальні ресурси. Тільки реалізуючи інтелектуальний освітній потенціал, напрацювання у високих технологіях, країна може одержати надійну і перспективну економічну опору.

Державна науково-технічна політика - складова частина соціально-економічної політики, що виражає відношення держави до наукової діяльності.

Розвиток науки і техніки є певним чинником прогресу суспільства, підвищення добробуту, духовного і інтелектуального зростання. Цим обумовлена необхідність пріоритетної державної підтримки розвитку науки, як «Закон про науку і науково-технічну діяльність» визначає правовий статус суб'єктів наукової діяльності, матеріальні й моральні стимули забезпечення престижності й пріоритетності цієї сфери людської діяльності.

Обов'язковою складовою успішних реформ у всіх країнах є випереджаючий розвиток інтелектуального потенціалу. Світовий досвід показує, що життєвий рівень усіх верств населення соціально-економічна ситуація в країні визначаються ступенем освіченості суспільства і його відношенням до інтелектуальних цінностей.

У двадцяти розвинених країнах працює 95% учених світу, прибуток на душу населення тут зростає щорічно на 200 доларів США, а в країнах з низьким науковим потенціалом – лише на 10 доларів.

Враховуючи обмеженість інтелектуальних ресурсів окремої країни, велика увага відводиться «імпорту інтелекту». Полювання за інтелектом в найближчому майбутньому перетвориться на самостійний і вигідний вид бізнесу.

Інтелектуальний потенціал нації - це:

- система освіти,

- комп'ютерне забезпечення,
- система зв'язку,
- бази даних і електроніка,
- система науки,
- інтелектуальна власність (патенти, ліцензії, ноу-хау).

Інтеграція України в світовий економічний простір можлива тільки через піонерські наукові досягнення.

Науковою основою для досліджень і ефективного управління різними системами служить системний підхід, сутність якого полягає в тому, що вивчається кожний елемент системи в його зв'язку і взаємодії з іншими елементами.

Точні науки не можуть дати повного й всебічного опису реальних об'єктів, оскільки вони дуже складні і часто описуються статистичними характеристиками.

Математика як метод пізнання навколишнього світу, з її винятковою потужністю не завжди може дати повний опис явищ, процесів і об'єктів. Математика вимагає ідеалізації. Реальна крапка, на відміну від ідеальної, має кінцеві розміри, реальний газ відрізняється від ідеального і т.д.

Сама по собі ідеалізація не є серйозним відступом від реальності, але виникає питання, наскільки близький досліджуваний об'єкт до його ідеального образу.

Ідеальний образ - це модель і наука має справу з моделями світу, дуже складними, але все таки моделями. Наука будує складну модель, яка відповідає дійсності, але цілком здатна вичерпатися, а потім вивчає цю модель або відкидає, замінюючи новою.

Модель - інструмент наукового пізнання. Слід пам'ятати, що модель лише приблизно відображає дійсність.

Чим вищі вимоги до точності результату, тим більшу кількість чинників треба враховувати при побудові моделі.

Вимога адекватності є однією з найважливіших при побудові моделі. Адекватність означає правильність якісного опису об'єкта за вибраними характеристиками. Адекватність - це і правильний якісний опис об'єкта за вибраними характеристиками з деякою розумною точністю.

Модель типу «чорного ящика» адекватна, якщо в рамках вибраного ступеня точності вона функціонує так само, як і реальна система, тобто визначає того ж оператора перетворення входів у виходи.

Побудова моделі завжди пов'язана з компромісом.

Гіпотеза про структуру моделі повинна прийматися на підставі фізичних уявлень про природу об'єкта і великої кількості апріорної інформації. Визначення системи нічого не говорить про внутрішній зміст, тому будь-яку систему можна зобразити у вигляді «чорного ящика».

Будуючи модель, дослідник з усієї цієї множини вибирає лише декілька змінних, що виконують важливу роль для функціонування системи.

1.2 Моделювання

Моделювання - це дослідження об'єктів пізнання на їх моделях, побудова і вивчення моделей реально існуючих предметів, явищ і конструкцій об'єктів.

Модель в широкому значенні - це образ якого-небудь об'єкта, що є оригіналом, або системи об'єктів:

- а) фізичне моделювання - експериментальне дослідження;
- б) математичне;
- в) імітаційне.

Науковий підхід до дослідження будь-якого явища полягає у формуванні заснованих на досліді та інтуїції абстрактних логічних уявлень, адекватність і доцільність яких перевіряється практично.

Етап абстрагування при вивченні того чи іншого фізичного явища або об'єкта полягає у виділенні найбільш суттєвих їх властивостей і ознак, представлення цих властивостей і ознак в такій спрощеній формі, що

забезпечує можливість наступного експериментального або теоретичного дослідження на достатньо змістовному рівні.

Представлення об'єкта або явища називається *моделлю*. Модель використовується для побудови шляхом логічної дедукції внутрішньо несуперечливої теорії, яка описує явища або поведінку об'єкта, а також для постановки експериментів.

Практична користь висновків, одержаних при використанні моделі, служить критерієм її адекватності.

У процесі дослідження систем використовується фізичне і математичне модулювання.

Фізичне моделювання здійснюється шляхом відтворення процесу, що досліджується на моделі, яка має відмінну від оригінала природу та однаковий математичний опис процесу функціонування (наприклад, маятник і коливальний контур). Єдність природи виявляється у вражаючій аналогічності диференціальних рівнянь, що відносяться до різних областей явищ.

Математичне моделювання полягає в розробці сукупності математичних співвідношень, що описують з тим або іншим ступенем точності процес функціонування системи. Формалізована математична модель відображає лише найбільш суттєві сторони, закономірності поведінки вивчаюваного об'єкта. Математична модель, як правило, містить опис множини можливих станів системи, опис закону, відповідно до якого система переходить з одного стану в інший, і задає макрофункцію системи – залежність вихідного сигналу (відгуку системи) від стану системи і вхідних впливів. При побудові математичних моделей можуть бути використані наступні фундаментальні принципи: фізичний детермінізм і фізичний індетермінізм.

1.3 Основні поняття і принципи теорії моделювання

Отже щоб порівняти між собою різні стратегії проведення операції (чи рішення), потрібно отримати відповідні значення показників ефективності. Для цього, у свою чергу, корисно мати математичну модель досліджуваної операції.

Таким чином, основна проблема полягає в тому, як її (модель) вибрати. У цьому випадку найкраще розраховувати на власні сили, точніше на власні знання і досвід. Якщо досвід приходить тільки з часом, то відповідні знання можна отримати безпосередньо з моделей.

Розглянемо основні принципи моделювання, які у стислій формі відображають певний досвід, що накопичений до дійсного часу в області розробки й використання математичних моделей.

Принцип інформаційної достатності. При повній відсутності інформації про досліджувану систему побудова її моделі неможлива. При наявності повної інформації про систему її моделювання позбавлене змісту. Існує деякий критичний рівень апріорних відомостей про систему (рівень інформаційної достатності), при досягненні якого може бути побудована її адекватна модель.

Принцип здійсненності. Створювана модель повинна забезпечувати досягнення поставленої мети дослідження з імовірністю, що істотно відрізняється від нуля, і за кінцевий час. Звичайно задають деяке граничне значення P_0 імовірності досягнення мети моделювання $P_{(t)}$, а також прийняту границю t_0 часу досягнення цієї мети. Модель вважають здійсненою, якщо виконана умова $P_{(t_0)} \geq P_a$

Принцип множинності моделей. Даний принцип є ключовим. Мова йде про те, що створювана модель повинна відбивати в першу чергу, ті властивості реальної системи (чи явища), що впливають на вибраний показник ефективності. Відповідно при використанні будь-якої конкретної моделі пізнаються тільки деякі сторони реальності. Для більш повного її дослідження необхідний ряд моделей, що дозволяють з різних сторін з різним ступенем детальності відбивати розглянутий процес.

Принцип агрегування. У більшості випадків складну систему можна подати як таку, що складається з агрегатів (підсистем), для адекватного математичного опису яких виявляються придатними деякі стандартні математичні схеми. Крім того, принцип агрегування дозволяє досить гнучко перебудовувати модель залежно від завдань дослідження.

Принцип параметризації. У ряді випадків моделювальна система має у своєму складі деякі відносно ізольовані підсистеми, що характеризуються певним параметром, у тому числі векторним. Такі підсистеми можна замінити в моделі відповідними числовими величинами, а не описувати процес їхнього функціонування. При необхідності залежність значень цих величин від ситуації може задаватися у вигляді таблиці, графіка чи аналітичного виразу (формули). Принцип параметризації дозволяє скоротити обсяг і тривалість моделювання. Однак треба мати на увазі, що параметризація знижує адекватність моделі.

Ступінь реалізації перерахованих принципів у кожній конкретній моделі може бути різним, причому це залежить не тільки від бажання розробника, але й від дотримання ним технології моделювання. А будь-яка технологія припускає наявність певної послідовності дій.

Слово «комп'ютер» поки що в нашому випадку не використовувалося. Проте рано чи пізно воно повинно було з'явитися. Почнемо зі словосполучення «комп'ютерне моделювання», що все частіше застосовується у відповідній літературі. Саме по собі це поняття дуже широке і кожен автор трактує його по-своєму. Зустрічаються, наприклад, такі вирази: «комп'ютерне моделювання екологічних систем», «комп'ютерне моделювання річок» і т.п. У зв'язку з цим є необхідність уточнити, що ж розуміють під цим терміном. У нашому випадку **комп'ютерне моделювання** – це моделювання з використанням засобів обчислювальної техніки. У комп'ютерному моделюванні модель застосовується як елемент, поряд з яким можуть бути і математичні, і нематематичні моделі. Відповідно, технологія комп'ютерного моделювання припускає виконання таких дій:

- визначення мети моделювання;
- розробка концептуальної моделі;
- формалізація моделі;
- програмна реалізація моделі;
- планування модельних експериментів;
- реалізація плану експерименту;

- аналіз і інтерпретація результатів моделювання.

Зміст перших двох етапів практично не залежить від математичного методу, покладеного в основу моделювання (навіть навпаки – їх результат визначає вибір методу).

Очевидно, в одних випадках більш кращим є аналітичне моделювання, в інших – імітаційне (чи поєднання того й іншого). Щоб вибір був вдалим, необхідно відповісти на два запитання:

- з якою метою проводиться моделювання?
- до якого класу може бути віднесене модельоване явище?

Відповіді на ці запитання можуть бути отримані в ході виконання двох перших етапів моделювання.

Загальна мета моделювання у процесі прийняття рішення – це визначення (розрахунок) значень вибраного показника ефективності (ПЕ) для різних стратегій проведення операції (чи варіантів реалізації системи, що проектується). При розробці конкретної моделі мета моделювання повинна уточнюватися з урахуванням використовуваного критерію ефективності. Для критерію придатності модель, як правило, повинна забезпечувати розрахунок значень ПЕ для всієї безлічі припустимих стратегій. При використанні критерію оптимальності модель повинна дозволяти безпосередньо визначати параметри досліджуваного об'єкта, що дають екстремальне значення ПЕ.

Таким чином, мета моделювання визначається як метою досліджуваної операції, так і планованим способом використання результатів дослідження. Наприклад, проблемна ситуація, що вимагає ухвалення рішення, формулюється в такий спосіб: знайти варіант побудови обчислювальної мережі, що мав би мінімальну вартість при дотриманні вимог щодо продуктивності й надійності. У цьому разі метою моделювання є встановлення параметрів мережі, що забезпечують мінімальне значення ПЕ, у ролі якого виступає вартість.

Задача може бути сформульована інакше: з декількох варіантів конфігурації обчислювальної мережі вибрати найбільш надійний. Тут у якості ПЕ вибирається один з показників надійності (середнє напруження на

відмову, імовірність безвідмовної роботи і т.д.), а метою моделювання є порівняльна оцінка варіантів мережі за цим показником.

Наведені приклади дозволяють стверджувати, що сам по собі вибір показника ефективності ще не визначає «архітектуру» майбутньої моделі, оскільки на цьому етапі не сформульована її концепція чи, як говорять, не визначена концептуальна модель досліджуваної системи.

1.4 Інформаційний пошук

Важливим етапом будь-якого наукового дослідження є глибокий інформаційний пошук за даною темою, критичне усвідомлення його результатів, уточнення завдань дослідження (а можливо, й самої теми).

Інформаційний пошук включає в себе надходження і одержання джерел інформації, що відбивають результати вже проведених раніше досліджень за даною тематикою, систематизують і узагальнюють їх, містять усі потрібні висновки.

Досліднику-початківцю треба мати на увазі, що інформаційний пошук – справа нелегка. Потoki інформації зростають так інтенсивно, що говорять навіть про інформаційний вибух! Справді, за даними ЮНЕСКО, на початку XIX ст. в усьому світі виходило близько 100 періодичних видань. Уже до 1850р. їх кількість збільшилась до 1000, до 1900 р. – перевищила 10000, а в наш час наближається до 500000. Крім того, безперервно збільшується кількість статей у журналах; тепер щорічно їх публікується близько 3000000. Що ж до книжок, то тільки за останні 25 років їх надруковано стільки, скільки було видано за всі попередні 500 років. Взагалі, річний приріст потоку науково-технічної інформації становить 7-10%, а кожні 15 років обсяг цієї інформації подвоюється. У нашій країні існує Державна система науково-технічних бібліотек, які виконують роль центрів науково-дослідної інформації.

Джерела науково-технічної інформації

1. Книги (підручники, навчальні посібники, монографії, брошури).

2. Періодичні видання (журнали, бюлетені, збірники праць інститутів, наукові збірники).
3. Нормативні документи (стандарти, СНІП, тощо).
4. Каталоги й прејскуранти.
5. Патентна документація (патенти й винаходи).
6. Звіти про науково-дослідні й дослідно-конструкторські роботи.
7. Інформаційні видання (збірники НТІ, аналітичні огляди).
8. Інформаційні листки, виставкові проспекти, тощо.
9. Переклади іноземної науково-технічної літератури.
10. Матеріали науково-технічних і виробничих нарад.
11. Дисертації та автореферати дисертацій.
12. Другорядні документи (реферативні огляди, бібліографічні каталоги, реферативні журнали, бібліографічні покажчики, тощо).

Збирання, збереження та видачу інформації здійснюють довідково-інформаційні фонди (ДІФ).

В Україні є центральні галузеві й місцеві (у НДІ) ДІФ. У кожному ДІФ є основний і довідковий фонд.

1.5 Етапи науково-технічного дослідження

1. Початковим обов'язковим документом для проведення науково-технічного дослідження є технічне завдання.
2. Інформаційний пошук і складання методики дослідження. Якщо мета дослідження - розробка способу отримання чого-небудь або створення певного пристрою (конструкції), то обов'язковим етапом є патентне дослідження.
3. Складання попереднього плану дослідження, сприяючого його проведенню найекономічнішим способом і при максимальній ефективності.
4. Попередня розробка дослідження. Обґрунтовується попередня гіпотеза.

Будується інформаційна модель, а потім перекладається математичною мовою.

Виявлення впливових чинників.

Видача ТЗ на проектування експериментальної установки.

5. Підготовка і проведення експериментальної частини дослідження.
6. Обробка даних експерименту. Аналіз і узагальнення результатів.
7. Оформлення результатів дослідження.
8. Впровадження закінчених розробок.

1.6 Проблематика наукових досліджень

У науково-дослідній роботі розрізняють:

- напрямок;
- проблему;
- тему.

Науковий напрямок – це сфера досліджень наукового колективу, що присвячені розв’язанню певних значних, фундаментальних або прикладних, теоретично-експериментальних проблем в даній галузі знань або людської діяльності (наприклад, науковий напрямок – спектрофотометрія неоднорідних середовищ, коли закон Бугера значно ускладнюється завдяки появі ефектів розсіювання, у зв’язку з чим виникає багато наукових проблем).

Структурними категоріями наукового напрямку є:

- проблема;
- тематика;
- питання.

Наукова проблема – це сукупність завдань, що охоплює значну область досліджень і має перспективне значення чи економічний або соціальний ефект (наприклад, у вищезазначеному науковому напрямку є проблема врахування кооперативних та розсіювальних ефектів, в результаті чого значно ускладнюється встановлення чи вимірювання точних значень оптичних параметрів часток, що зумовлюють розсіювання. Ця проблема може бути

вирішена експериментально завдяки, наприклад, внесенню у вимірювальну систему інтегрувальної сфери, в якій реалізується закон збереження випромінювання:

$R + \alpha + \sigma + T = 1$. При цьому вимірявши R , α , і T , знаходимо, σ , яке і вносить спотворення у вимірювальну інформацію).

Проблема вирішується, задачі – розв’язуються.

Щоб вирішити проблему або розв’язати задачі, треба сформулювати і виконати наукові роботи з теми, дати відповідь на певні наукові запитання, що виникають у ході наукової роботи або на етапі постановки завдання досліджень.

Під **науковим питанням** розуміють конкретні наукові завдання, що відносяться до вузької області наукових досліджень.

Постановка **теми** включає ряд етапів:

- вибір і формулювання теми;
- прогнозування очікуваного результату;
- постановлення актуальної (тобто її цінності або своєчасності, або корисності на даному етапі);
- розроблення структури наукової теми і визначення конкретних наукових питань, які потрібно дослідити.

Тему і наукову проблематику обговорюють на засіданні наукового колективу з опонентами у процесі дискусії.

Тема повинна розв’язувати нове наукове завдання, тобто таке, яке до цього часу ніколи не розроблялося, або не повторювало вже відомих істин.

Завдання є наукові, а є інженерні. Наукові завдання – це такі, які знаходять принципову новизну в явищах і процесах і які є ще невирішеними. Інженерні завдання направлені на практичну реалізацію та удосконалення існуючих способів, приладів, методів і т.ін.

Тема повинна відповідати профілю наукового колективу, який має достатню компетентність, спеціалізацію, традиції, досвід, теоретичний рівень в розв’язанні тих чи інших наукових завдань.

Науковий напрямок очолює досвідчений керівник – науковець. Наукову проблему вирішує, як правило, колектив під керівництвом доктора наук. Наукове завдання розв’язують кандидати наук. Конкретні завдання або питання розв’язують виконавці, в тому числі наукові працівники, інженерний склад і студенти.

Емпіричний рівень дослідження

Експеримент – це науково поставлене дослідження або нагляд дослідженого явища в точно розрахованих або наперед заданих умовах.

Теоретичний рівень.

Висуваються і формуються загальні дані в предметній області, закономірності, що дозволяють не тільки пояснити, але й передбачити, тобто створюються теорії.

Різні закономірності в навколишній дійсності можуть бути представлені в наступному вигляді:

$$Y = F(x_1, x_2, x_3, t, a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \pm \Delta Y, \quad (1.1)$$

де Y - характеристика об’єкта дослідження, що вивчається;

x_1, x_2, x_3, \dots, t , - координати простору й часу;

a_1, a_2, \dots, a_i - параметри, що визначають протікання процесу і залежать від форми матерії, її стану і структури.

Вираз (1.1) представляє науковий закон. Прийнявши значення ΔY як ознаку, можна розділити об’єкти дослідження на дві групи:

1) $\Delta Y \rightarrow 0$, закон виражається функціональною залежністю і процеси називаються детермінованими;

2) значенням ΔY нехтувати не можна, необхідно спробувати встановити статистичні (імовірнісні) зв’язки.

У природі немає строго детермінованих процесів. Є процеси, які можна вивчати детермінованими методами і одержувати при цьому задовільні результати. Але є процеси, вивчення яких неможливо без застосування статистичних або інших методів. У міру розвитку науки, поглиблення наших знань про об’єктивну дійсність, у міру врахування все більш широкого кола

впливових факторів, значення останніх методів все більш зростає. Яскравим прикладом здійснення цієї тенденції є найбільш загальна наука про природу – фізика.

1.7 Методи проведення наукових досліджень

Метод - сукупність прийомів або операцій практичного або теоретичного об'єкта дійсності, які застосовуються для вирішення конкретного завдання.

Порівняння - операція мислення, за допомогою якої класифікують, упорядковують і оцінюють зміст дійсності.

Вимірювання - це операція мислення, за допомогою якої визначається відношення однієї (вимірюваної) величини, до іншої, однорідної їй величини, що приймається за одиницю. Число, що виражає таке відношення, називається числовим значенням вимірюваної величини.

Індукція - це вид узагальнення, пов'язаний з представленням результатів наглядів і експериментів на основі даних простого досвіду.

Дедуція - операція мислення, яка полягає в тому, що нові знання виводяться на підставі знань загальнішого характеру, одержаних раніше шляхом узагальнень наглядів, дослідів, практичної репутації і т.д.

Аналіз - це процедура розкладання предмета або явища на складові частини в цілях пізнання.

Синтез - це по'єднання різних елементів, сторін об'єкта в єдине ціле, яке здійснюється як у практичній діяльності, так і в процесі пізнання.

Будь-який процес утворення поняття заснований на єдності аналізу і синтезу.

Наукова ідея - це форма думки, що є новим поясненням явища.

Нові знання: парадигма - парадокс - парадигма.

Гіпотеза - науково обгрунтоване припущення про безпосередньо не спостережуваний факт або про закономірну подію, що пояснює відому сукупність знань.

Абстракція - це метод наукових досліджень, заснований на тому, що при вивченні деякого об'єкта відвертаються від його неістотних в даній ситуації сторін, ознак:

- а) ізолюючої;
- б) узагальнюючої;
- в) організуючої.

Узагальнення - форма приросту знання шляхом уявного переходу від часткового до загального, яке звичайно відповідає переходу на вищий ступінь абстракції.

1.8 Тенденції розвитку науки

У чому полягають основні тенденції розвитку сучасної науки – науки пізнання і науки творчості. Існує твердження про те, що наука розвивається на шляху все більшої спеціалізації. Обсяг знань виріс настільки, що тепер неможливо бути не то що Леонардо да Вінчі або Ломоносовим, але й просто фізиком на кшталт фізика XIX століття. Вже не має фізики як такої, а є атомна фізика, радіофізика, фізика надпровідників, фізика низьких температур, молекулярна фізика і т. ін.

Спеціалісти в цих галузях всі не розуміють один одного, вони говорять на різних мовах. Розвиток науки прийняв гігантські розміри. Звичайно, значно легше бути вузьким спеціалістом, ніж вченим, який мислить широкими категоріями. Посилаючись на спеціалізацію, можна обґрунтувати лінощі розуму, не бажаючи знайомитись з іншими галузями знань.

У дійсності ситуація зовсім інша. Основна тенденція сучасної науки полягає в діалектичній єдності спеціалізації і об'єднання. Саме об'єднання різних дисциплін, побудова єдиного природознавства – найважливіша риса науки в наші дні.

Математика, фізика, хімія, біологія – основні галузі природознавства. Сьогодні вони об'єднуються. Раніше тільки фізика широко застосовувала математичні ідеї, математичний апарат. Тепер цей процес поглиблюється,

фізичні процеси стимулюють створення нових розділів математики. Математика ввирвалася в хімію. Такі абстрактні її розділи, як топологічна теорія графів, стала основою не тільки дослідження теоретичних проблем хімії, але й вирішення технологічних питань. Після створення квантової механіки була побудована фізична теорія хімічних зв'язків. Таємниче до цього явище одержало наукове пояснення. Тепер ясно, що в основі будь-якого хімічного явища знаходяться фізичні процеси. Широко розвинулись проміжні науки, умовно розділені на фізичну хімію і хімічну фізику.

У кінці XX ст. відбулося включення біології в систему точних наук, що характеризуються строгим математичним підходом, точними формулюваннями законів і висновків. У результаті об'єднання біології з фізикою і хімією виникла молекулярна біологія – одна з найбільш перспективних і багатообіцяючих галузей сучасного природознавства. Хімія звернулась до біологічно-функціональних речовин – розвинулась біоорганічна і біофізична хімія. Ідеї і методи одних наук все більше вриваються в інші науки. Сама класифікація наук стає історично змінною.

У результаті об'єднання математики, фізики, електро- і радіотехніки, біології і фізіології виникла кібернетика, яка відіграє найважливішу роль в сучасному науковому світогляді. Давно було ясно, що вихід на перехрестя наук, встановлення нових зв'язків між далекими, здавалось би, явищами природи означає прорив на новий етап пізнання. Це і є шлях науки.

Багато що заважає цьому природному процесу об'єднання. Відома теза про необхідність вузької спеціалізації, повільність руйнування рутини шкільної і університетської освіти, в результаті якої хімік боїться інтеграла, а фізик – хімічної формули. Психологічно зрозуміла боязнь об'єднання наук – будь-яке руйнування традицій сприймається боляче. Є тут і омана: створення фізичної теорії хімічних явищ, створення квантової хімії представляється знищенням хімії як самостійної науки. У дійсності значення і краса ідей та методів хімії як науки піднімається на більш високий ступінь. Природному і неминучому об'єднанню

наук спричиняє і зростання загальної культури, раціональне планування розвитку науки.

Не менш суттєвим є виникнення нових наук (ергономіка, теорія ігор, теорія систем) і поява нових областей у старих науках (конструктивістська математика, фрактальна математика, логіка практичних міркувань, алгебра нечітких множин і т. ін.), що зумовлено людською діяльністю.

Майстром культури близького майбутнього, ймовірно, буде не вузький спеціаліст, багатосторонній діяч, якому близькі і наука, і мистецтво, а творче життя в цілому. Буде поглиблюватись поняття вченими їх відповідальності перед суспільством, пильна увага до етики і естетики.

Важливою тенденцією розвитку науки є її подальша інтеграція. У цьому зв'язку здається принциповою екстраполяція синтетичних процесів у науці й змісту знання на пізнавальні засоби вираження і перетворення цього знання. Тут мається на увазі не тільки спроби побудови загальної теорії систем. Не менш важливі ті зміни, що відбуваються в сучасній методології науки. Вони характеризуються взаємопроникненням, зближенням ідеалів природничонаукового і гуманітарного знання.

Важливим є переорієнтація дослідницького інтересу з питання «як пізнати» на метапроблему – «для чого пізнати». Інакше кажучи, важливим регулятором інтеграційних процесів сучасної науки стають ціннісні аспекти.

Однією з найважливіших тенденцій розвитку сучасної науки є орієнтація на людину. Проблема людини, її ролі й місця в сучасному світі набула гострого соціального змісту. Вона знаходиться в центрі теоретичного дослідження цілого комплексу наук: філософії, соціології, психології, біології, медицини, економіки, енергетики і т. ін.

Ще однією важливою тенденцією розвитку наукового пізнання є його технологічна направленість.

Розвиток творчих здібностей людини стає проблемою суспільного виробництва. Подолати розділення технологічної і культурної функції науки – одна з особливостей сучасного наукового знання.

Технологічне застосування знання в тій мірі, в якій воно одночасно виступає як процес розвитку людини, є культурним феноменом. Але неправомірно ототожнювати технологізацію науки з реалізацією її культурної функції. Результатом цього процесу може бути підвищення ефективності суспільної праці не через розвиток техніки, а внаслідок підвищення її культури. Сполучення технологічної і культурної функції науки веде до взаємопроникнення зовнішніх і внутрішніх факторів наукового розвитку.

Проблеми, що виникають у виробництві, адресовані науці не як зовнішні цілі, а як мета культурного чоловіка, який перетворює світ.

Якщо наука, яка виникла в результаті відділення духовних потенцій від матеріального виробництва і довгий час була лише функцією останнього, змушена була реагувати на його запити, то тепер самі ці запити і навіть цілі галузі виробництва констатуються завдяки іманентному розвитку науки.

Розгляд взаємозв'язку науки і виробництва орієнтує дослідження не на минуле, а на майбутнє, тобто на створення людиною свого власного світу. А це накладає свій відбиток і на розвиток самої людини. Вона повинна формуватися не як «частковий» робітник, а як універсальна, цілісна особистість.

Розуміння науки в контексті людської діяльності веде до необхідності визнання внутрішньої соціальної зумовленості пізнання не тільки суспільства, але й природи. Звідси випливає, що пізнання світу разом з тим є самопізнання людини, і воно містить в собі соціальний і гуманістичний сенс.

Гуманізація науки – довгий процес. Незважаючи на потужні інтеграційні тенденції, зв'язки між природничими і суспільними науками мають переважно зовнішній характер. Більше того, навіть в середині однієї і тієї ж сфери природничої науки вузька спеціалізація розділяє вчених стіною некомпетентності.

Проблеми, що виникають на межі наук, ведуть до створення нових наукових дисциплін відповідно до галузевого принципу їх структурування. Проте стрімке зростання інтеграційних процесів показує, що вже на сучасному

етапі галузевий принцип перестав відповідати провідним тенденціям розвитку науки й виробництва.

Відсутність необхідної пружності стає перепорою на шляху науково-технічного прогресу. Вузька спеціалізація і відсутність органічного взаємозв'язку природничих і гуманітарних наук створює від'ємний вплив на розвиток науки в цілому.

У наш час втілення наукового знання у практику є єдиноспрямованим процесом. Зворотній зв'язок малоефективний. Саме це є причиною того, що в практику втілюються не ті знання, які дійсно потрібні, а ті, які впроваджуються більш легко і більш простіше. Цим пояснюється невміння і небажання більшості виробників орієнтуватися на нові досягнення науки. Ситуація ускладнюється ще й тим, що знання, які можуть бути втілені в практику, мають комплексний характер, тобто вони базуються на різних, інколи взаємовиключаючих принципах раціональності.

1.9 Державна науково-технічна політика

Економіка будь-якої держави не може спиратися лише на сировинні ресурси. Тільки реалізуючи інтелектуальний, освітній потенціал, невитребовані доробки у високих технологіях, країна зможе одержати надійну й перспективну економічну опору.

Важливою проблемою для державної науково-технічної і інноваційної політики України є прагнення до досягнення стандартів сучасного європейського і світового рівня. Якщо ще десять років тому для забезпечення конкурентних позицій України було достатньо проведення ринкових перетворень в системі науково-технічного виробництва і удосконалення інституціонального середовища, то тепер вже потрібна глибинна і комплексна модернізація усіх підсистем суспільства. Така модернізація повинна бути послідовною і виконуватись на основі доктрини – *доктрини економіки знань*.

Сьогодні саме знання, здатність до їх генерацій, використання і розповсюдження стає основою національної конкурентоздатності і базовою передумовою прискореного соціально-економічного росту.

Економіка знань, яка є фундаментом і головним компонентом «інноваційної економіки», базується на якісному змісті освіти і продуктивних знаннях, що забезпечує можливість втілення гуманітарно-інтелектуального капіталу в практичні результати.

Розвиток інтелектуального потенціалу населення – основа основ інноваційного вибору України, базовий пріоритет державної політики в освітній, науковій і науково-технічній сферах, головна мета держави, що має на увазі:

- реалізацію і розвиток творчих здібностей талановитих дітей і молоді;
- комплексний розвиток системи освіти;
- стимулювання дослідної і наукової діяльності шляхом творчої розумової праці;
- підвищення суспільного престижу роботи вчених і наукових працівників;

Цим зумовлена необхідність пріоритетної державної підтримки розвитку науки як джерела економічного зростання і невід'ємної частини національної культури і освіти, створення умов для реалізації інтелектуального потенціалу громадян у сфері наукової і науково-технічної діяльності, цілеспрямованої політики в забезпеченні використання досягнень вітчизняної і світової науки й техніки для задоволення соціальних, економічних, культурних і інших потреб.

«Закон про науку і науково-технічну діяльність» визначає правовий статус суб'єктів наукової і науково-технічної діяльності, матеріальні й моральні стимули забезпечення престижності й пріоритетності цієї сфери людської діяльності, залучення до неї інтелектуального потенціалу нації, економічні, соціальні і правові гарантії наукової та науково-технічної діяльності, свободи наукової творчості; основні цілі, напрямки й принципи державної політики у сфері наукової і науково-технічної діяльності; повноваження органів державної влади відносно виконання державного регулювання і управління в сфері науковій і науково-технічній діяльності.

Наукова діяльність – інтелектуальна творча діяльність, направлена на одержання і використання нових знань. Основними її формами є фундаментальні й прикладні наукові дослідження.

Фундаментальні наукові дослідження - наукова теоретична, або експериментальна діяльність, направлена на одержання нових знань про закономірність розвитку природи, суспільства, людини, їх взаємозв'язок.

Прикладні наукові дослідження – наукова і науково-технічна діяльність, спрямована на одержання і використання знань для практичних цілей.

Науково-технічна діяльність – інтелектуальна творча діяльність, направлена на одержання і використання нових знань у всіх областях науки й технології. Її основними формами є науково-дослідні, дослідно-конструкторські, проектно-конструкторські, технологічні, пошукові й проектно-пошукові роботи, виготовлення дослідних зразків або партій науково-технічної продукції, а також роботи, пов'язані з доведенням наукових і науково-технічних знань до стадії практичного використання.

Науково-педагогічна діяльність - педагогічна діяльність у вищих навчальних закладах і закладах післядипломної освіти III-IV рівнів акредитації, пов'язана з науковою або науково-технічною діяльністю.

Науково-організаційна діяльність – діяльність направлена на методичне, організаційне забезпечення і координацію наукової, науково-технічної і науково-педагогічної діяльності.

Суб'єктами наукової і науково-технічної діяльності є: вчені, наукові працівники, науково-педагогічні працівники, а також наукові заклади, наукові організації, вищі навчальні заклади III-IV рівнів акредитації, суспільні організації з науковою і науково-технічною діяльністю.

Вчений – фізична особа, яка має вищу освіту і проводить фундаментальні або прикладні наукові дослідження і одержує наукові або науково-технічні результати.

Наукова робота – дослідження з метою одержання наукового результату. Науковий результат – нове знання, одержане у процесі фундаментальних або

прикладних наукових досліджень і зафіксованих на носіях наукової інформації у формі звіту, наукової роботи, наукової доповіді, наукового повідомлення, монографічного дослідження, наукового відкриття і т. д.

Наукова або науково-технічна продукція – науковий або науково-технічний результат, призначений для реалізації.

Науково-прикладний результат – нове конструктивне або технологічне рішення, експериментальний зразок, закінчене випробування, розробка, яка впроваджена або може бути впроваджена в суспільну практику. Науково-прикладний результат може бути у вигляді звіту, економічного проекту конструкторської або технологічної документації на науково-технічну продукцію.

Науковою організацією визнається юридична особа, незалежно від організаційно-правової форми і форми власності, а також суспільне об'єднання наукових працівників, основною діяльністю яких відповідно до установчих документів є наукова або науково-технічна діяльність і підготовка наукових працівників.

Наукові організації діляться на науково-дослідні організації, наукові організації закладів вищої професійної освіти, дослідно-конструкторські, проектно-конструкторські, проектно-технологічні та інші організації, які здійснюють наукову або науково-технічну діяльність.

Уряд і органи виконавчої влади організують відповідно до законодавства державну акредитацію наукових організацій і видають їм посвідчення про державну акредитацію. Посвідчення про державну акредитацію видається науковій організації, обсяг наукової або наукової-технічної діяльності якої складає не менше сорок відсотків загального обсягу робіт, що виконуються організацією і статутом якої передбачена вчена (наукова, технічна, науково-технічна) рада як один із органів керування. Посвідчення про державну акредитацію є підставою для надання науковій організації пільг, встановлених для наукових організацій законодавством.

Науковій організації, яка має унікальні досліджено-експериментальне устаткування, наукових працівників і спеціалістів високої кваліфікації і наукова або науково-технічна діяльність якої одержала міжнародне визнання, урядом може бути присвоєний статус державного наукового центра.

Органи державної влади повинні:

- гарантувати суб'єктам наукової і науково-технічної діяльності свободу творчості, даючи їм право вибору напрямку й методів проведення наукових досліджень;
- гарантувати захист від недобросовісної конкуренції, визнавати право на обґрунтований ризик, забезпечувати свободу доступу до наукової і науково-технічної інформації;
- гарантувати підготовку, підвищення кваліфікації і перепідготовку наукових працівників і спеціалістів державних наукових організацій;
- гарантувати фінансування проектів, що виконуються за державним замовленням.

Науковий працівник – вчений, який за основним місцем роботи, відповідно до трудового договору професійно займається науковою і науково-технічною, науково-організаційною або науково-педагогічною діяльністю, і має відповідну кваліфікацію незалежно від наявності наукового ступеня або вченого звання, підтверджену результатами атестації.

Науково-педагогічний працівник – вчений, який за основним місцем роботи займається професійною педагогічною і науковою або науково-технічною діяльністю у вищих навчальних закладах і установах післядипломної освіти III-IV рівній акредитації.

Науковим працівником (дослідником) є громадянин, який має необхідну кваліфікацію і професійно займається науковою і науково-технічною діяльністю. Єдиний реєстр, передбачений державною системою атестації наукових ступенів і вчених звань, а також порядок присудження наукових ступенів або присвоювання вчених звань встановлюється урядом.

Право видачі дипломів і атестатів, які підтверджують присудження наукових ступенів і присвоєння вчених звань, має спеціально уповноважений на це урядом орган виконавчої влади.

Спеціалістом наукової організації (інженерно-технічним працівником) є громадянин, який має середнє професійну або вищу професійну освіту і сприяє одержанню наукового і науково-технічного результату або його реалізації.

Вчений має право:

- вибирати форми, напрямки й засоби наукової і науково-технічної діяльності відповідно до своїх інтересів, творчих можливостей і загальнолюдських цінностей;
- об'єднуватися з іншими вченими в постійні або тимчасові наукові колективи для проведення наукової і науково-технічної діяльності;
- брати участь у конкурсах на виконання наукових досліджень, які фінансуються за рахунок коштів Державного бюджету України та інших джерел відповідно до законодавства України;
- претендувати на визнання авторства на наукові й науково-технічні результати своєї діяльності;
- публікувати результати своїх досліджень у порядку, встановленому законодавством України;
- брати участь у конкурсах на заміщення вакантних посад наукових і науково-педагогічних працівників;
- одержувати, передавати й розповсюджувати наукову інформацію;
- одержувати державне й суспільне визнання через присудження наукових ступенів, присвоєння вчених звань, премій, почесних звань за вклад у розвиток науки, технологій, впровадження наукових, науково-прикладних результатів у виробництво і за підготовку наукових кадрів.

Вчений при виконанні наукової, науково-технічної і науково-педагогічної діяльності зобов'язаний:

- не завдавати збитків здоров'ю людини, її життю і оточуючому середовищу, притримуватися етичних норм наукового співавторства, поважати право на інтелектуальну власність.

Науковий працівник має право на:

- визнання його автором наукових і науково-технічних результатів і подачу заявок на винаходи та інші результати інтелектуальної діяльності;
- одержання доходів від реалізації наукової і науково-технічної діяльності і винагород, заохочень і пільг, відповідних його творчому вкладу;
- здійснення підприємницької діяльності в галузі науки й техніки;
- подачу заявок на участь у наукових дискусіях, конференціях і симпозіумах;
- участь у конкурсі на фінансування наукових досліджень за рахунок бюджету, фондів підтримки наукової і науково-технічної діяльності та інших джерел;
- подачу заявок на участь у міжнародному науковому і науково-технічному співробітництві (стажування, відрядження, публікації наукових праць за межами території держави);
- доступ до інформації про наукові й науково-технічні результати, якщо вона не містить відомостей, що відносяться до державної, службової або комерційної таємниці, та інші;
- публікацію у відкритому друку наукових і науково-технічних результатів;
- мотивовану відмову від участі в наукових дослідженнях, що спричиняють негативний вплив на людину, суспільство і оточуюче середовище;
- підвищення кваліфікації.

Науковий працівник зобов'язаний:

- здійснювати наукову й науково-технічну діяльність і експериментальні розробки, не порушуючи прав і свободи людини, не спричиняючи шкоди її життю і здоров'ю, а також оточуючому природному середовищу;
- об'єктивно здійснювати експертизи представлених йому наукових і науково-технічних програм і проектів, наукових і науково-технічних результатів і експериментальних розробок.

Наукові працівники можуть укладати договори про сумісну наукову або науково-технічну діяльність, можуть створювати на добровільній основі суспільні об'єднання (наукові, науково-технічні й науково-просвітні товариства, суспільні академії наук). Органи державної влади можуть залучати до добровільних суспільних об'єднань наукових працівників для підготовки проектів рішень в області науки й техніки, проведення експертиз, а також на основі конкурсів до виконання наукових і науково-технічних програм і проектів, що фінансуються за рахунок коштів відповідного бюджету.

1.10 Завдання планування експерименту

З постановкою і проведенням експериментів фактично пов'язана історія людства в цілому. Проте в більшості випадків ці роботи проводились хаотично на рівні інтуїції і попереднього досвіду, тому коефіцієнт корисної дії їх був досить низьким. Коли враховувати, що вартість одного досліду, як правило, висока, то не важко уявити, скільки коштувало людству проведення науково не спланованих експериментів. Особливо це важливо при дослідженні складних систем (а сучасні об'єкти практично всі є складними), поведінка яких залежить від великої кількості факторів.

Важливою умовою науково поставленого досліду є мінімізація загального числа дослідів (а значить, затрат матеріальних, трудових і часових), при цьому зменшення кількості дослідів не повинно суттєво відбитись на якості одержаної інформації.

При плануванні експерименту необхідно перш за все визначити мету експерименту і показники його якості, вказати характеристики плану і побудувати модель експерименту, вибрати критерії оптимальності плану і встановити обмеження на показники якості дослідження. Організація і проведення експериментального дослідження потребує застосування особливих методів планування експерименту, тобто процедури вибору числа дослідів, необхідних і доступних для вирішення завдання з необхідною точністю і

статистичною надійністю, умов постановки дослідів, методів математичної обробки результатів і методів теорії прийняття рішень.

Таким чином, після того як вибрана модель об'єкта і сформульована мета дослідження, треба спланувати експеримент, тобто: вибрати методи вимірювань і можливі типи засобів вимірювань; дати апріорну оцінку похибок вимірювань; сформулювати вимоги до метрологічних характеристик засобів і умов вимірювань; вибрати засоби вимірювань відповідно до заданих вимог; вибрати параметри вимірювальної процедури; координати точок області експерименту, числа спостережень для кожної точки плану, моментів часу вимірювання, послідовності проходження точок плану; підготувати засоби вимірювання для проведення експерименту; забезпечити умови проведення експерименту. Експеримент необхідно реалізувати таким чином, щоб за мінімальною кількістю дослідів, варіюючи значення незалежних змінних за спеціально сформульованим правилом, побудувати математичну модель і знайти значення факторів, що забезпечують оптимальне функціонування системи. Простота і наявність строгого математичного апарата, розробленого для моделі «чорний ящик», зумовили широке розповсюдження саме цього типу моделі.

Факторами називаються змінні величини, що приймають в деякий момент часу певне значення і відповідним чином діють на об'єкт. Факторами можуть бути як зовнішні для об'єкта впливи (температура., тиск, напруженість магнітного і електричного полів, сила тяжіння, параметри джерела живлення та ін.), так і параметри самого об'єкта (опір, ємність та ін. параметри електричної схеми). Вибір факторів, параметрів оптимізації і моделей здійснюється з урахуваннями мети досліджень і умов для проведення експерименту. Кожний фактор може мати в досліді одне, або кілька значень, які називаються рівнями. Фіксований набір рівнів факторів визначає одне з можливих станів об'єкта, що досліджується, і відповідає визначеній точці багатомірного факторного простору.

Фактори можуть бути як кількісними, так і якісними.

Методика планування експерименту в більшості випадків потребує точної установки значень факторів, тому фактори повинні бути доступними вимірюванню з точністю на порядок вище, ніж точність вимірювання вихідної величини.

На різні набори рівнів система реагує по різному. Проте існує певний зв'язок між рівнями факторів і реакцією (відгуком) системи.

Вихідна величина в теорії планування експерименту залежно від завдань, що вирішуються, називається відгуком, функцією мети або параметром оптимізації. Серед множини вихідних величин дослідник повинен вміти виділити один параметр, який повинен допускати кількісну оцінку і для якого необхідно встановити функціональну залежність від рівнів факторів або який необхідно оптимізувати.

2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ

2.1 Числові характеристики випадкових величин

Функція розподілу повністю описує випадкову величину з вірогідної точки зору. Проте на практиці достатньо вказати окремі параметри. Одними з таких характеристик є **початкові** m_k і **центральні** M_k моменти різних порядків k :

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx ; \quad (2.1)$$

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(x)]^k p(x) dx . \quad (2.2)$$

На практиці використовується один початковий момент першого порядку

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx , \quad (2.3)$$

який називається математичним очікуванням.

Математичне очікування відноситься до характеристик положення, яке вказує на деяке середнє значення, навколо якого групуються всі можливості значення випадкової величини.

Центральний момент другого порядку, названий дисперсією D , служить мірою розсіювання випадкової величини.

$$D_x = D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(x)]^2 p(x) dx. \quad (2.4)$$

Властивості дисперсії:

- 1) $D(a)=0, d = const$;
- 2) $D = D(x) = a^2 D(x)$;
- 3) $D(x \pm y) = D(x) + 2\rho\sqrt{D(x)D(y)}$;

де ρ – коефіцієнт кореляції

$$\rho = \frac{M[(x - M(x))(y - M(y))]}{\sqrt{D(x)D(y)}};$$

- 4) $D(x) = M(x^2) - M^2(x)$ - дисперсія випадкового числа дорівнює різниці між математичним очікуванням його квадрата і квадратом математичного очікування.

Чим більше дисперсія, тим значніше розсіювання випадкової величини:

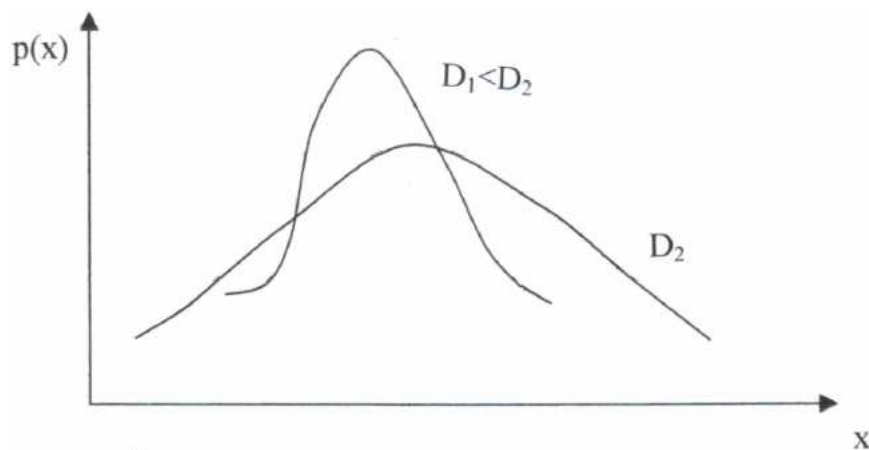


Рис. 2.1

У метрології як міра розсіювання частіше використовується середнє квадратичне відхилення (СКВ), яке має розмірність випадкової величини $\sigma(x) = +\sqrt{D(x)}$.

2.1.1 Точкові оцінки числових характеристик експериментальних законів розподілу

Теоретичні закони розподілу характеризуються числовими характеристиками: початковими й центральними моментами різних порядків. Для експериментальних можна одержати оцінки цих характеристик. Оскільки ці оцінки на числовій осі можуть бути подані у вигляді точок, їх прийнято називати **точковими** на відміну від **інтервальних**, які зображуються на числовій осі у вигляді інтервалу.

На противагу самим числовим характеристикам їх оцінки є випадковими, причому їх значення і розсіювання залежить від числа експериментальних даних.

Спроможною оцінкою називається оцінка, яка із збільшенням вибірки наближається до істинного значення.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{M}_x = M_x; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{D}_x = D_x.$$

За визначенням математичного очікування

$$M_x = \int_{-\infty}^{+\infty} X_p(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n X_j p(X_j) \Delta X.$$

Оскільки кожне значення X_i , з'являється один раз при загальному обсязі вибірки n то $p(X_i) = \frac{1}{n \Delta X}$ звідки

$$M_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right].$$

При кінцевому n оцінкою M_x є середнє арифметичне

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j. \quad (2.5)$$

Оскільки \bar{X} з'явилося з M_x при обмеженому обсязі вибірки, то є **спроможною оцінкою математичного очікування**.

За визначенням дисперсії

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - M_x)^2 p(X) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (X_i - M_x)^2 p(X_i) \Delta X = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M_x)^2,$$

тобто спроможною оцінкою D_x є так звана **вибіркова дисперсія**

$$D_x^{\wedge} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M_x)^2. \quad (2.6)$$

На практиці M_x невідоме, тому при розрахунку D_x змінюють оцінкою \bar{X} :

$$D_x^{\wedge} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \quad (2.7)$$

Це не впливає на спроможність D_x оскільки $\bar{X} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M_x$ проте, як буде показано далі, є причиною зміщення оцінки дисперсії (2.6).

Незміщеною називається оцінка, математичне очікування якої дорівнює самій характеристиці:

$$M(M_x^{\wedge}) = M_x; \quad M(D_x^{\wedge}) = D_x$$

$$M[\bar{X}] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i] = \frac{1}{n} n M_x$$

Таким чином, середнє арифметичне є незміщеною оцінкою математичних очікувань результатів багаторазових спостережень при будь – якому законі розподілу.

Перевіримо незміщеність оцінки дисперсії.

$$M(D_x^{\wedge}) = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M_x + M_x - \bar{X})^2\right] =$$

$$= M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M_x)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X - M_x)^2 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{X}_i - M_x)(X - M_x)\right] =$$

$$= D_x + D_{\bar{x}} - 2M\left[X - M_x\right] \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M_x)$$

Оскільки

$$D_{\bar{x}} = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{n D_x}{n^2} = \frac{D_x}{n} \quad (2.8)$$

$$M(D_x^{\wedge}) = \frac{n-1}{n} D_x.$$

Тобто незміщеною оцінкою дисперсії є

$$D_x^{\wedge} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (2.9)$$

при $n \rightarrow \infty \frac{n}{n-1} \rightarrow 1$, тому одна оцінка (2.9) виявляється також спроможною, як і оцінка (2.6).

Оцінка середньоквадратичного відхилення результату спостереження визначається, як правило, за формулою

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\hat{D}_x} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \quad (2.10)$$

Проте зважаючи на нелінійність операції знаходження квадратного кореня, така оцінка є зміщеною для малого числа спостережень n , тому для усунення цього зміщення для $n < 6$ застосовується вираз

$$\hat{\sigma}_x = K_n \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \quad (2.11)$$

Загальний вигляд коефіцієнта K_n для нормального розподілу представлений на рис.2.2 і добре апроксимується виразом

$$K_n = 1 + \frac{1}{4(n-1)}.$$

Ефективною називається оцінка, яка має найменшу дисперсію (розсіяння) у порівнянні з іншими.

Для вибору ефективної оцінки існує метод **максимальної правдоподібності** – метод Фішера:

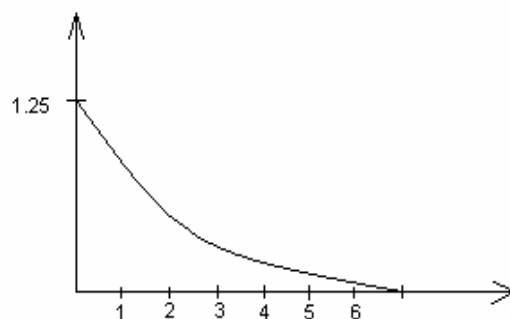


Рис. 2.2

Ідея цього методу полягає у відшуванні таких оцінок параметрів розподілу, при яких досягає максимуму так звана функція правдоподібності. Остання визначається як вірогідність появи всіх незалежних результатів спостережень X_1, X_2, \dots, X_n . Оскільки вірогідність появи результатів X_i , яка лежить в інтервалі Δx , дорівнює $p_i = p(x)\Delta x$, то для незалежних результатів спостережень вірогідність появи X_1, X_2, \dots, X_n є добутком цієї вірогідності:

$$p(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n \Delta x p(X_i). \quad (2.12)$$

Згідно з принципом максимальної правдоподібності необхідно знати такі оцінки параметрів функції розподілу $p(X_i)$, при яких вираз (2.12) досягає найбільшого значення.

Для спрощення скористаємося логарифмічною функцією правдоподібності:

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \ln p(X_i). \quad (2.13)$$

Умову максимуму (2.13) одержують в результаті вирішення системи рівнянь, утвореної при прирівнюванні нулю похідної по тих параметрах, оцінки яких ми хочемо визначити. Це завдання можна вирішити для конкретного виду диференційної функції розподілу.

Нормальний розподіл:

$$p(X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{(x_i - M_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (2.14)$$

Звідси логарифмічна функція правдоподібності

$$L = \sum_{i=1}^n \ln[p_{X_i}] = \sum_{i=1}^n \left[-\ln \sqrt{2\pi\sigma_x} - \frac{(X_i - M_x)^2}{2\sigma_x^2} \right]. \quad (2.15)$$

Оцінка математичного очікування

$$\left. \frac{\partial L}{\partial M_x} \right|_{M_x = \hat{M}_x} = \frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n 2(X_i - \hat{M}_x).$$

$$\text{Звідси } M_x^{\wedge} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}.$$

Таким чином, середнє арифметичне є не тільки спроможною і не зміщеною оцінкою математичного очікування, але і для нормального розподілу найефективнішою.

Дисперсія середнього арифметичного дорівнює

$$D_{\bar{x}} = \frac{Dx}{n},$$

тобто в n раз менше дисперсії результату спостереження.

Визначимо ефективну оцінку дисперсії для нормального розподілу

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \sigma_x} \right|_{M_x = M_x^{\wedge}} = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{\sigma_x} + \frac{2(X_i - M_x^{\wedge})^2}{2\sigma_x^3} \right] = 0.$$

$$\text{Звідки } \frac{n}{\sigma_x^{\wedge}} = \frac{1}{\sigma^{\wedge}} \sum_{i=1}^n (X_i - M_x^{\wedge})^2, \quad \sigma_x^{\wedge 2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M_x^{\wedge})^2.$$

Тобто для нормального розподілу одержана оцінка дисперсії є ефективною.

2.2 Інтервальні оцінки розподілу результатів спостережень і вимірювань

Сенс оцінки параметрів за допомогою інтервалів полягає у знаходженні інтервалів, названих довірчими, в межах яких з певною ймовірністю (довірчою) знаходяться істинні значення оцінюваних параметрів.

За допомогою середньоквадратичного відхилення (СКВ) можна оцінити ймовірність того, що при одноразовому спостереженні випадкова похибка за абсолютною величиною не перевищить деякої наперед заданої величини ε , тобто ймовірність

$$P\{|\delta| < \varepsilon\}.$$

Для цього запишемо вираз для дисперсії випадкової похибки:

$$\sigma_x^2 = D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2 p_{\delta}(\delta) d\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^2 p_{\delta}(x) dx,$$

$$\delta = x - M_x,$$

$$\sigma_x^2 \geq \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta^2 p_\delta(\delta) d\delta + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \delta^2 p_\delta(\delta) d\delta.$$

При заміні під знаком інтеграла δ^2 на меншу величину ε^2 нерівність можна тільки збільшити:

$$\sigma_x^2 \geq \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varepsilon^2 p_\delta(\delta) d\delta + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varepsilon^2 p_\delta(\delta) d\delta = \varepsilon^2 \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} p_\delta(\delta) d\delta + \int_{\varepsilon}^{+\infty} p_\delta(\delta) d\delta \right].$$

Інтеграл у квадратних дужках є ймовірністю того, що похибка набуде значення, що лежить в інтервалі, визначеному межами інтегрування:

$$\sigma_x^2 \geq \varepsilon^2 (P\{-\infty < \delta \leq +\varepsilon\} + P\{\varepsilon < \delta \leq \infty\}) = \varepsilon^2 (1 - P\{-\varepsilon < \delta \leq +\varepsilon\}) = \varepsilon^2 (1 - P\{|\delta| < \varepsilon\}).$$

Звідси одержуємо остаточно

$$\begin{aligned} P\{|\delta| < \varepsilon\} &\geq 1 - \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}; \\ P\{|\delta| < \varepsilon\} &< \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Цей результат відомий як нерівність Чебишева.

Вважаючи $\varepsilon = 3\sigma_x^2$, знайдемо ймовірність того, що результат одноразового спостереження відрізняється від істинного значення на величину, більшу потрійного середнього квадратичного відхилення, тобто ймовірність того, що випадкова похибка виявиться більшою $3\sigma_x^2$.

$$P\{|\delta| > 3\sigma_x\} < \frac{\sigma_x^2}{(3\sigma_x^2)} = \frac{1}{9} \approx 11\%.$$

Ймовірність того, що похибка вимірювання не перевищить $3\sigma_x^2$, складе відповідно

$$P\{|\delta| < 3\sigma_x\} \geq 1 - \frac{\sigma_x^2}{(3\sigma_x^2)} \approx 89\%.$$

Нерівність Чебишева дає тільки нижню межу для ймовірності $P\{\delta|\langle\varepsilon\},$ менше за яку вона не може бути ні при якому розподілі. Звичайно $P\{\delta|\langle 3\sigma\}$ значно більше 89%. Так, у разі нормального розподілу ця величина складає 99,73%. У більшості практичних випадків дуже рідко зустрічаються похибки більше, тому інтервал $(-3\sigma_x; +3\sigma_x)$ вважається інтервалом практично можливих значень випадкової похибки.

Обчислимо ймовірність попадання результату спостережень в деякий заданий інтервал $(x_1; x_2)$ (використовуючи нормальний розподіл):

$$P\{x_1 \langle X \langle x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p_x dx = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx. \quad (2.17)$$

Замінімо змінні:

$$\frac{x-M_x}{\sigma_x} = t; \frac{x_1-M_x}{\sigma_x} = t_1; \frac{x_2-M_x}{\sigma_x} = t_2, \quad (2.18)$$

$$P\{x_1 \langle X \langle x_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{t_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt - \int_{-\infty}^{t_1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right].$$

Це нормований розподіл з диференціальною функцією

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}. \quad (2.19)$$

Інтегральною функцією є

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt. \quad (2.20)$$

За допомогою (2.20) ймовірність знаходимо як

$$P\{x_1 \langle X \leq x_2\} = \phi(t_2) - \phi(t_1) = \phi\left(\frac{x_2 - Q}{\sigma_x}\right) - \phi\left(\frac{x_1 - Q}{\sigma_x}\right). \quad (2.21)$$

При використанні формули (2.21) слід мати на увазі тотожність

$$\phi(z) \equiv 1 - \phi(-z). \quad (2.22)$$

Вважаючи $t_1 = -t_2 = t_p$

$$(M_x - t_p \sigma_x; M_x + t_p \sigma_x)$$

$$P\{M_x - t_p \sigma_x \leq X \leq M_x + t_p \sigma_x\} = \Phi(t_p) - \Phi(-t_p) = 2\Phi(t_p) - 1.$$

Але

$$P\{M_x - t_p \sigma_x \leq X \leq M_x + t_p \sigma_x\} = P\{M_x - t_p \sigma_x \leq M_x \leq M_x + t_p \sigma_x\},$$

якщо систематична похибка виключена ($M_x = Q$)

$$P\{X - t_p \sigma_x \leq Q \leq X + t_p \sigma_x\} = 2\phi(t_p) - 1, \quad (2.23)$$

це означає, що істинне значення Q вимірюваної величини з довірчою ймовірністю $P = 2\Phi(t_p) - 1$ знаходиться між межами довірчого інтервалу:

$$[X - t_p \sigma_x; X + t_p \sigma_x].$$

Половина довжини довірчого інтервалу $t_p \sigma_x$ називається довірчою границею випадкового відхилення результатів спостереження, яка відповідає довірчій ймовірності P .

Для визначення довірчої границі заданої ймовірності, наприклад $P = 0,95$ або $P = 0,995$ і за формулою

$$2\Phi(t_p) - 1 = P,$$

$$\Phi(t_p) = \frac{1 + P}{2} \quad (2.24)$$

знаходимо відповідне значення $\Phi(t_p)$ інтегральної функції нормованого нормального розподілу. Потім за даними таблиці знаходимо значення коефіцієнта t_p і обчислюємо довірче відхилення $t_p \sigma_x$.

Проведення багаторазових спостережень дозволяє значно скоротити довірчий інтервал. Дійсно, якщо результат спостережень $X_i (1, 2, 3, \dots, n)$ розподілений нормально, то нормально розподілені й величини $\frac{1}{n} X_i$, а значить

і середнє арифметичне \bar{X} , яке є їх сумою. Тому має місце рівність

$$P\{\bar{X} - t_p \sigma_x \leq Q \leq \bar{X} + t_p \sigma_x\} = P\left\{\bar{X} - t_p \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \leq Q \leq \bar{X} + t_p \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(t_p) - 1, \quad (2.25)$$

де t_p визначається, як і раніше, за формулою (2.25) при заданій довірчій ймовірності P .

Одержаний довірчий інтервал, побудований за допомогою середнього арифметичного результатів n незалежних повторних спостережень, в \sqrt{n} разів коротше інтервалу, обчисленого за результатом одного спостереження, хоча довірка ймовірність для них однакова. Це говорить про те, що збежність вимірювань зростає пропорційно кореню квадратному із числа спостережень.

Половина довжини нового довірчого інтервалу

$$\delta_p = t_p \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (2.26)$$

називається довірчою границею похибки результату вимірювань, а результат вимірювання запишеться як

$$Q = \bar{X} \pm \delta_p; \quad P = \dots \% \quad (2.27)$$

Тепер розглянемо випадок, коли розподіл результатів спостережень нормальний, але їх дисперсія невідома. У цих умовах користуються відношенням

$$t = \frac{\bar{X} - M[x]}{S_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - Q}{S_{\bar{X}}} \sqrt{n} \frac{\bar{X} - Q}{S_{\bar{X}}}, \quad (2.28)$$

яке називається дріб Ст'юдента.

Величини \bar{X} і $S_{\bar{X}}$ обчислюють на основі дослідних даних, вони являють собою точкові оцінки математичного очікування і середнього квадратичного відхилення результатів спостережень:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Щільність розподілу цього дробу, вперше встановленого В.С. Госсетом, який писав під псевдонімом Ст'юдент, і в подальшому доведеного Фішером, виражається наступним рівнянням:

$$S(t; k) = \frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi k} \left(\frac{k}{2}\right)!} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad (2.29)$$

де $S(t; k)$ - щільність розподілу Ст'юдента.

Величина k називається числом ступенів свободи і дорівнює $n-1$.

Ймовірність того, що дріб Ст'юдента в результаті виконаних спостережень прийме деяке значення в інтервалі $(-t_p; +t_p)$, обчислюється за формулою

$$P\{-t_p < t \leq +t_p\} = \int_{-t_p}^{+t_p} S(t; k) dt. \quad (2.30)$$

Або, оскільки $S(t; k)$ є парною функцією аргументу t

$$P\{-t_p < t \leq +t_p\} = 2 \int_0^{t_p} S(t; k) dt. \quad (2.31)$$

Підставимо замість дробі Ст'юдента її вираз через \bar{X} , $S_{\bar{X}}$ і Q , одержимо

$$P\left\{-t_p < \frac{\bar{X} - Q}{S_{\bar{X}}} \leq +t_p\right\} = P\{\bar{X} - Q | t_p S_{\bar{X}}\} = 2 \int_0^{t_p} S(t; k) dt. \quad (2.32)$$

Величини t_p , обчислені за формулами (2.31) і (2.32), були табульовані Фішером для різних значень довірчої ймовірності P в межах 0,1-0,99 при $k=n-1=1, 2, \dots, 30$.

Таким чином, за допомогою розподілу Ст'юдента, за формулою (2.32) може бути знайдена ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного від істинного значення вимірюваної величини не перевищують

$$\delta_p = t_p S_{\bar{X}}, \text{ наприклад } 2S_{\bar{X}}, 3S_{\bar{X}} \text{ і т.д.}$$

Результат вимірювання запишемо у вигляді (2.27)

2.3 Довірчі інтервали для дисперсії і середнього квадратичного відхилення

Якщо розподіл результатів спостереження нормальний, то відношення

$$X_k^2 = X_{n-1}^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2} \quad (2.33)$$

має так званий X^2 (X_i – квадрат) розподіл Пірсона з $k=n-1$ ступенями свободи. Його диференціальна функція розподілу описується формулою

$$P_{X_k^2}(\xi) = \frac{1}{\left(\frac{k}{2}-1\right)! 2^{\frac{1}{2}k}} \xi^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\xi}, \quad (2.34)$$

де $k=n-1$ – число ступеней свободи розподілу.

Криві щільності X^2 – розподілу при різних значеннях k обчислені за формулою (2.34), подані на рис.2.3.

Оскільки відношення $X_{k,p}^2$ суттєво позитивне, то крива його інтегральної функції розподілу починається з 0 при i і має вигляд

$$F(X_{k,p}^2) = P\left\{\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2} \leq X_{k,p}^2\right\} = \frac{1}{\left(\frac{k}{2}-1\right)! 2^{\frac{1}{2}k}} \int_0^{X_{k,p}^2} \xi^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{\xi}{2}} d\xi. \quad (2.35)$$

Значення $X_{k,p}^2$ які відповідають різним ймовірностям p - того , що відношення (2.33) в даному досліді менше X_k^2 , представлені в таблицях додатків. Користуючись цією таблицею, можна знайти довірчий інтервал для оцінки дисперсії результатів спостережень при заданій довірчій ймовірності. Цей інтервал будується таким чином, щоб ймовірність виходу дисперсії за його межі не перевищувала деякої малої величини q , причому ймовірність виходу за обидві границі інтервалу були б рівні між собою і складали відповідно 1/2 (див. рис. 2.4).

Границі $X_{k;\frac{q}{2}}^2; X_{k;1-\frac{q}{2}}^2$ такого довірчого інтервалу знаходять із рівності

$$F\left(X_{k;\frac{q}{2}}^2\right) = \frac{q}{2}; F\left(X_{k;1-\frac{q}{2}}^2\right) = 1 - \frac{q}{2}. \quad (2.36)$$

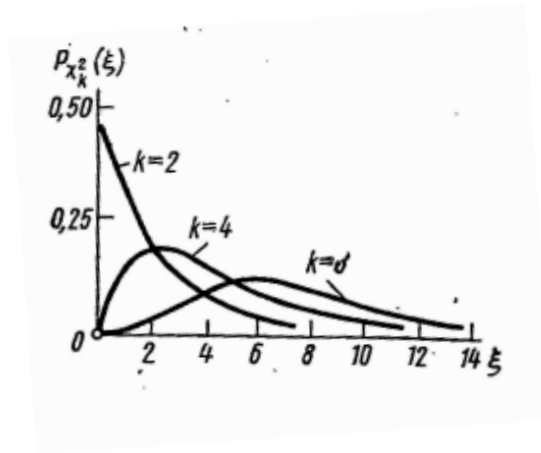


Рис. 2.3

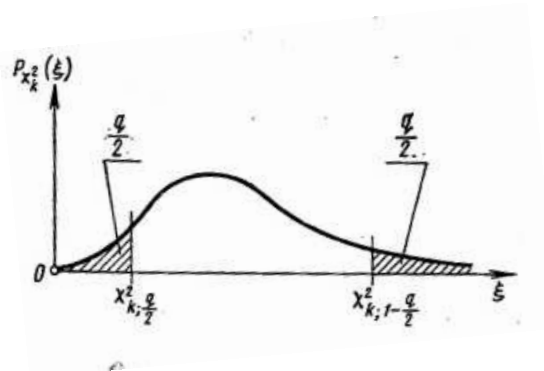


Рис. 2.4

Тоді, знаючи границі довірчого інтервалу для відношення знайдемо довірчий інтервал для дисперсії

$$P\left\{X^2_{k;\frac{q}{2}} \leq \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2} \leq X^2_{k;1-\frac{q}{2}}\right\} = P\left\{\frac{1}{X^2_{k;\frac{q}{2}}} \leq \frac{\sigma_x^2}{(n-1)S_x^2} \leq \frac{1}{X^2_{k;1-\frac{q}{2}}}\right\} = P\left\{\frac{(n-1)S_x^2}{X^2_{k;\frac{q}{2}}} \leq \sigma_x^2 \leq \frac{(n-1)S_x^2}{X^2_{k;1-\frac{q}{2}}}\right\} = 1-q \quad (2.37)$$

І відповідно

$$P\left\{\frac{\sqrt{(n-1)S_x}}{X^2_{k;\frac{q}{2}}} \leq \sigma_x \leq \frac{\sqrt{(n-1)S_x}}{X^2_{k;1-\frac{q}{2}}}\right\} = 1-q. \quad (2.38)$$

Одержана рівність означає, що з ймовірністю $\alpha=1-q$ істинне значення σ_x середнього квадратичного відхилення результатів спостережень лежить в інтервалі $(S_{x1}; S_{x2})$, межі якого дорівнюють

$$S_{x1} = \frac{\sqrt{(n-1)S_x}}{X_{k, \frac{q}{2}}^2}; S_{x2} = \frac{\sqrt{(n-1)S_x}}{X_{k, 1-\frac{q}{2}}^2} \quad (2.39)$$

2.4 Знаходження грубих похибок

Грубими називають похибки, які явно перевищують за своїм значенням похибки оправданими умовами проведення експерименту. Особливо часто ставиться питання про усунення грубих похибок при обробці вже наявного матеріалу, поки неможливо врахувати всі обставини, при яких проводили вимірювання. У цьому випадку доводиться застосовувати чисто статистичні методи.

Питання про те, містить даний результат спостережень грубу похибку чи ні, вирішується загальними методами перевірки статистичних гіпотез.

Гіпотеза, що перевіряється, полягає у твердженні, що результат спостережень X_i не містить грубої похибки, тобто є одним із значень випадкової величини X із законом розподілу $F_X(x)$, статистичні оцінки параметрів якого попередньо визначені. Сумнівним може бути в першу чергу лише найбільший X_{\max} , або найменший X_{\min} із результатів спостереження. Тому для перевірки гіпотези необхідно користуватися розподілами величин.

$$v = \frac{x_{\max} - \bar{x}}{S_x} \quad \text{або} \quad v = \frac{\bar{x} - x_{\min}}{S_x}$$

Функції їх розподілу визначають методами теорії ймовірності. Вони співпадають між собою і для нормального розподілу результатів спостережень протабульовані і представлені в таблиці. За даними цієї таблиці при заданій довірчій ймовірності α , або рівні значущості $q=1-\alpha$ можна для чисел $n=3-25$ вимірювання знайти ті найбільші значення V_α , які випадкова величина v може ще прийняти за чисто випадковою причиною.

Якщо обчислені за дослідними даними значення будуть менше V_α то гіпотеза приймається; у протилежному виразі її необхідно відкинути як таку, що суперечить даним спостережень. Тоді результат X_{\max} , або X_{\min} доводиться

розглядати як такий, що містить грубу похибку, і не приймати його до уваги при подальшій обробці результатів.

3. РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ

3.1 Кореляційна залежність

Як визначається функціональна залежність? В основі лежить ідея однозначної відповідності між величинами. Кожному значенню однієї змінної - аргументу строго відповідає значення іншої змінної - функції. Проте кожний експериментатор знає, що це поняття є лише абстракцією. Як би точно не виконувався експеримент, як би строго не закріплювались умови досліду й побічні фактори, неминучий розкид результатів. І неможливо прийти до однозначних висновків про залежність, що нас цікавить.

Метою експериментальних досліджень є одержання залежності між вхідними й вихідними величинами, яка називається функцією відклику. Функція відклику є в загальному випадку функцією багатьох змінних і про неї ми маємо самі загальні уявлення (інколи інтуїтивні).

Кінцевою метою експериментальних досліджень є математична модель, що адекватно описує поведінку об'єкта.

3.2 Два основних завдання вимірювання зв'язків

1. Визначити на основі великої кількості даних, як змінювалась би функція при зміні одного із своїх параметрів, якщо б інші її аргументи не змінювались. Причому завдання повинно вирішуватись на матеріалі, коли інші аргументи в дійсності змінюються і своєю змінністю викривляють залежність, що нас цікавить.
2. Визначити ступінь викривляючого впливу інших факторів на залежність, що нас цікавить. Іншими словами, необхідно виявити ступінь, за яким дана залежність проявляється серед різноманіття порушуючих їх впливів.

Завдання статистичного вимірювання зв'язку завжди вирішувались при заданому числі враховуваних ознак.

Нехай світлотехнічна апаратура після зборки і наладки на підприємстві проходить стадію випробувальної роботи або тренінгу. У процесі тренінгу усуваються різні ефекти. В якості показника надійності можна скористатися часом безвідмовної роботи приладу, причому гарантійний час приймемо за 100% надійності. Нас цікавить залежність надійності (в % до гарантійного терміну) від тренуваності апаратури (в % до номінального терміну, встановленого ТЗ).

Надійність Y , аргумент – тренуваність X .

Для дослідження цієї залежності скористуємося даними про партію із 200 приладів. Матеріал можна представити графічно, як показано на рис 3.1.

Результати кожного спостереження відмічаються точкою в системі координат.

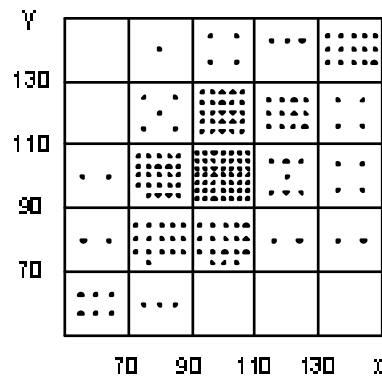


Рис 3.1 - Поле кореляції

Зважаючи на представлений матеріал можна зразу ж сказати, що між Y і X існує залежність. Але це не функціональна залежність.

Вважається, що Y кореляційно залежить від X , якщо

- 1) кожному значенню аргументу X відповідає ряд розподілу функції Y ;
- 2) із змінною X ці ряди закономірно змінюють своє положення.

Рис 3.1 дає нам поле кореляції. Якщо із зміною X ряди не змінюють свого положення або змінюють його випадково, Y кореляційно не залежить від X .

3.3 Емпірична лінія регресії

При дослідженні кореляційної залежності необхідно визначити, в якій бік і з якою швидкістю зміщуються ряди розподілу функції на тих або інших ділянках зміни аргументу. Для цього треба оцінити положення рядів розподілу на осі y .

Перенесемо результати розрахунку на поле кореляції (рис 3.2). Із середини інтервалів аргументу відтворимо ординату, що відповідає \bar{y} .

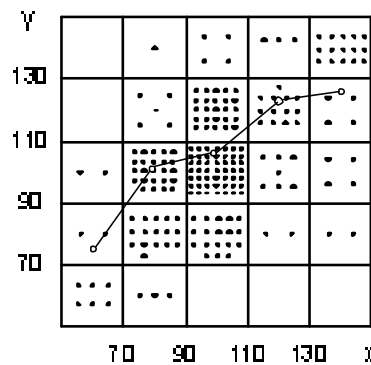


Рис 3.2

Одержана ламана лінія називається емпіричною лінією регресії Y по X . Вона характеризує зміщення рядів розподілу Y із збільшенням X , тобто показує як у середньому змінюється Y із збільшенням X .

Згідно із законом великих чисел можна стверджувати, що при збільшенні числа спостережень емпірична лінія регресії буде все точніше відбивати досліджувану закономірність.

Граничне положення, до якого прагне емпірична лінія регресії при необмеженому збільшенні числа спостережень, називається граничною теоретичною лінією регресії. При $N \rightarrow \infty$ ламана лінія стає все більш плавною і перетворюється в теоретичну лінію регресії.

Спочатку будемо розглядати лінійні моделі. Вибір для розгляду тільки лінійних моделей не обмежує загальності одержаних висновків. Це зумовлено тим, що багато нелінійних моделей можуть бути приведені до лінійних за допомогою відповідних перетворень.

Таким чином, за результатами проведеного експерименту необхідно підібрати (або зробити спробу підібрати) таку гладку криву (в лінійному випадку криву лінію), щоб вона розташувалась як можна ближче до теоретичної лінії регресії. Не можна очікувати, що всі точки поля кореляції ляжуть на відповідну пряму, оскільки навіть у випадку „безпохибкового” задання вхідної величини вихідна величина Y буде піддаватись випадковим флуктуаціям у результаті дії факторів, якими ми можемо керувати або про існування яких ми не знаємо.

Схема об'єкта для даного випадку наведена на рис 3.3.

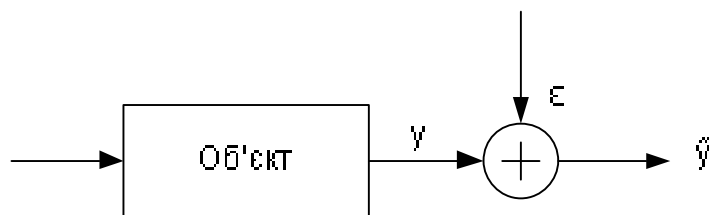


Рис. 3.3 - Модель стохастичного зв'язку

Величина ε зумовлена похибкою вимірювання функції виклику. Її можна інтерпретувати як перешкоду чи шум.

Вважаючи, що вхідна величина не випадкова, а фіксована або керована, для кожного значення x_i маємо випадкову величину y_i із середнім значенням $\varphi(x)$, тобто $\tilde{y}_i = \varphi(x_i) + \varepsilon_i$, де математичне очікування

$$M[\varepsilon_i] = 0.$$

Функція $\varphi(x)$ називається функцією регресії випадкової величини Y на X , а графік цієї функції – лінією регресії Y на X . Її математичне очікування визначається так:

$$M[\tilde{y}] = a_0 + a_1 x$$

На практиці можливі випадки, коли обидві величини X і Y є випадковими. Пара випадкових величин має деякий сумісний розподіл. Рівняння регресії в цьому випадку визначається як умовне математичне очікування змінної Y відносно X (регресія Y на X). Величина

$$M[Y/X] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y/x) dy$$

являє собою усереднену характеристику зв'язку між Y і X .

Крім прямої регресії можлива і обернена регресія:

$$M[X/Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x/y) dx.$$

Схема регресії як умовне математичне очікування є більш загальною.

Класична регресія, що полягає в дослідженні лінійної залежності для фіксованих значень X , характеризується безумовною регресією. Вона дозволяє робити висновки тільки для даного набору незалежної змінної, тоді як в умовній регресії одержані висновки і оцінки мають більш загальний характер. Ці висновки можуть бути розповсюджені на всю генеральну сукупність незалежних змінних.

Спочатку будемо розглядати лінійні моделі – лінійні за параметром a_i . Вибір для розгляду тільки лінійних моделей не обмежує загальності одержаних висновків. Це зумовлено тим, що багато нелінійних моделей можуть бути приведені до лінійних за допомогою відповідного перетворення. Моделі ж, які містять фактори в другому і вищих ступенях, або фактори в них є функціями будь-яких інших змінних ($\sin x$, $\lg x$ і т.і.), можуть бути перетворені в лінійні.

3.4 Метод найменших квадратів

Нехай маємо N пар спостережень (x_i, y_i) , причому x_i – фіксовані значення вхідної величини. Цьому набору відповідає деяке поле кореляції. Необхідно підібрати лінію регресії виду

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x,$$

яка б найкращим чином описувала поведінку об'єкта. Як вже відмічалось, через наявність, наприклад, похибки вимірювання значення вихідної величини \tilde{y}_i також будуть випадковими.

Для оцінки коефіцієнтів регресії \hat{a}_0 і \hat{a}_1 використовується метод найменших квадратів (МНК), який дозволяє мінімізувати суму квадратів різниці відхилення експериментальних даних \tilde{y}_i і розрахункових значень, отриманих за рівнянням регресії

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x.$$

МНК полягає в мінімізації функції

$$Q = \sum_{i=1}^N \left(\tilde{y}_i - \hat{y}_i \right)^2 \longrightarrow \min.$$

Для лінійної парної залежності маємо

$$Q = \sum_{i=1}^N \left[\tilde{y}_i - \left(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i \right) \right]^2 \longrightarrow \min.$$

При знаходженні оцінок коефіцієнтів, які задовольняють даним умовам, необхідно взяти часткові похідні $\frac{\partial Q}{\partial \hat{a}_j}$ і прирівняти до нуля. Отримаємо систему

рівнянь, яка називається системою нормальних рівнянь. Число цих рівнянь відповідає числу невідомих:

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{a}_0} = -2 \sum_{i=1}^N \left(\tilde{y}_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i \right) = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{a}_1} = -2 \sum_{i=1}^N \left(\tilde{y}_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i \right) \cdot x_i = 0,$$

$$\hat{a}_0 N + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i,$$

$$\hat{a}_0 \sum_{i=1}^N x_i + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i x_i.$$

$$A = \begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{vmatrix} = N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2,$$

$$A_0 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i x_i \end{vmatrix}.$$

Може бути нескінченна множина гіпотез про конкретний вид моделі (значення коефіцієнтів). Завдання полягає у виборі моделі, що найкращим чином описує поведінку об'єкта. Для цього скористуємося методом максимальної правдоподібності:

$$P\left(\tilde{y}_i / x_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\tilde{y}_i - y_i)^2}{2\sigma^2}}$$

Якщо маємо N вибраних точок, де проводились експерименти, то функція правдоподібності дорівнюватиме добутку ймовірностей

$$L = \prod_i P\left(\tilde{y}_i / x_i\right),$$

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - y_i)^2},$$

$$\ln L = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - N \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - y_i)^2.$$

Для отримання оцінок максимальної правдоподібності

$$\sum_{i=1}^N [\tilde{y}_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2 \longrightarrow \min.$$

Ця умова співпадає з умовою МНК.

Таким чином, МНК є частковим випадком методу максимальної правдоподібності при нормальному законі розподілу.

3.5 Множинний регресійний аналіз

На практиці випадкова вихідна величина Y часто залежить не від однієї, а кількох змінних. У такому разі можна говорити про поверхню регресії.

$$M(Y/X_1 = X_1, X_2 = X_2, \dots, X_n = X_n) = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Будемо розглядати лінійні моделі, для яких функція регресії лінійна за параметрами \hat{a}_j ($j = \overline{1, \dots, n}$).

Для проведення регресійного аналізу необхідно виконання наступних умов:

- точність, з якою задаються вхідні змінні (фактори) x_j , що не є випадковими величинами, повинна бути високою;
- похибки вимірювань вихідної величини є випадковими з математичним очікуванням, рівним нулю;
- результати спостережень являють собою однорідні незалежні нормально розподілені величини;
- кожний фактор не є лінійною комбінацією інших факторів.

Таким чином регресія, що розглядається, має вигляд безумовного математичного очікування. Завдання множинного регресійного аналізу полягає в побудові такої прямої в n -мірному просторі, квадрат відхилення результатів спостереження від якого був би мінімальним.

Виходячи із властивостей, які має система нормальних рівнянь, на основі якої визначається оцінка коефіцієнтів рівняння регресії, для n факторного експерименту можна записати:

[illegible]

Рішення даної системи рівнянь і дає значення оцінок коефіцієнтів \hat{a}_j методу найменших квадратів.

Аналіз рівнянь і методика стає більш наглядними, а розрахункові процедури суттєво спрощуються, якщо використовуємо матричну форму запису. Сукупність вхідних величин представляємо у вигляді вектора, що

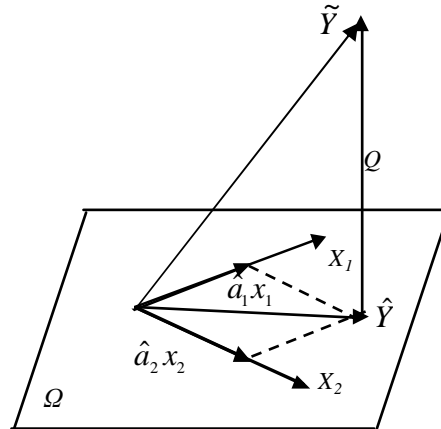


Рис.3.4 - Геометричне представлення методу найменших квадратів

$$X = \begin{vmatrix} X_{10} & X_{11} & \dots & X_{1j} & \dots & X_{1n} \\ X_{20} & X_{21} & \dots & X_{2j} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{N0} & X_{N1} & \dots & X_{Nj} & \dots & X_{Nn} \end{vmatrix}$$

подається на об'єкт, який досліджується, і вимірюються вихідні величини, які відповідають даній точці фактичного простору, утвореного вхідними величинами:

$$\tilde{Y} = |\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N|^t.$$

Результатами даних спостережень при відомих X необхідно знайти вектор \hat{A} , який є оцінкою методу найменших квадратів. Геометрично це може бути інтерпретовано наступним чином. В ідеальному випадку вектор вихідних величин представляється у вигляді $Y=XA$. Через наявність похибок вектор спостережень результатів експерименту буде $\tilde{Y} = XA + \varepsilon$. За методом найменших квадратів мінімізується значення

$$\varepsilon^t \varepsilon = |\tilde{Y} - \hat{Y}|^2.$$

Область Ω , в якій розташовані вектори вхідних величин, являє собою гіперплощину (на рис. 3.4 показаний двомірний випадок). У цій же площині Ω відображається вектор регресії \tilde{Y} . Мінімальній відстані між векторами спостережень \hat{Y} і гіперплощиною Ω відповідатиме довжина перпендикуляра, опущеного із кінця цього вектора на гіперплощину, тобто \hat{Y} є проекцією \tilde{Y} на область Ω і квадрат довжини вектора $Q = |\tilde{Y} - \hat{Y}|^2$ буде мінімальним. Умова ортогональності різницевого вектора $\tilde{Y} - \hat{Y}$ до гіперплощини Ω може бути записана у вигляді: $X^t(\tilde{Y} - \hat{Y}) = 0$, де X^t – транспонована матриця вхідних величин (по відношенню до матриці X в ній стовпці й рядки помінялися місцями). Одержуємо нормальне рівняння у матричній формі:

$$X^t X \hat{A} = X^t \tilde{Y}. \quad (3.2)$$

Матриця $X^t X = C$ називається інформаційною матрицею. Тоді нормальне рівняння можна переписати у вигляді

$$C \hat{A} = X^t \tilde{Y}, \quad (3.3)$$

і воно завжди має рішення.

Дійсно, для матриці X , яка є матрицею плану (кожен рядок показує умови проведення і-го дослідження), транспонована матриця буде:

$$X^t = \begin{vmatrix} X_{10} & X_{20} & \dots & X_{N0} \\ X_{11} & X_{21} & \dots & X_{N1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{1j} & X_{2j} & \dots & X_{Nj} \\ X_{1n} & X_{2n} & \dots & X_{Nn} \end{vmatrix}.$$

Інформаційна матриця в цьому випадку

$$C = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N X_{i0}^2 & \sum_{i=1}^N X_{i0} X_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^N X_{i0} X_{ij} & \dots & \sum_{i=1}^N X_{i0} X_{in} \\ \sum_{i=1}^N X_{i0} X_{i1} & \sum_{i=1}^N X_{i1}^2 & \dots & \sum_{i=1}^N X_{i1} X_{ij} & \dots & \sum_{i=1}^N X_{i1} X_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^N X_{i0} X_{in} & \sum_{i=1}^N X_{i1} X_{in} & \dots & \sum_{i=1}^N X_{ij} X_{in} & \dots & \sum_{i=1}^N X_{in}^2 \end{vmatrix}$$

буде квадратною розмірністю $(n+1) \times (n+1)$.

Для визначення вектора \hat{A} оцінок МНК необхідно вираз (3.3) домножити зліва на отриману матрицю C^{-1} . Оскільки матриця C квадратна, то її можна обернути. Обернена матриця C^{-1} називається коваріаційною (дисперсійною). Перепишемо вираз (3.3) таким чином:

$$C^{-1}CA = C^{-1}X^t \tilde{Y}.$$

Добуток оберненої матриці на пряму дає одиничну матрицю. У результаті одержимо вираз для вектора оцінок коефіцієнтів:

$$\hat{A} = C^{-1}X^t \tilde{Y}. \quad (3.4)$$

Кожний коефіцієнт множинної регресії визначається з виразу:

$$\hat{a}_j = \sum_{i=1}^n C_{ij} \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i x_{iy}, \quad (3.5)$$

де C_{ij} – елементи матриці C^{-1} .

Знаходження варіаційної матриці C^{-1} при значній кількості факторів n – складне і трудомне завдання. Якщо при перевірці моделі встановлено, що точність апроксимації мала, то все треба починати спочатку, оскільки будь-яка добавка (значення) елементів у рівнянні регресії відповідно до (3.5) приведе до зміни значень усіх коефіцієнтів a_j . Таким чином, після уточнення рівняння регресії необхідно знову транспонувати матрицю, а потім відповідно до (3.5) визначати a_j , тобто всі коефіцієнти рівняння регресії взаємопов'язані.

Відомо, що просто обертається діагональна матриця – матриця, в якій всі елементи, крім тих, що стоять на головній діагоналі, дорівнюють нулю. Для обернення матриці C в діагональну треба виконати умову

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} x_{ik} = 0 \quad j \neq k,$$

яка називається умовою ортогональності і може використовуватися в тому випадку, коли в n -мірному факторному просторі кожному з факторів поставити у відповідність одну із взаємноперпендикулярних осей. Тоді матриця C і відповідна їй коваріаційна матриця C^{-1} матимуть вигляд

$$C = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N x_{i0}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^N x_{i1}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{i=1}^N x_{in}^2 \end{vmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{vmatrix} 1/\sum_{i=1}^N x_{i0}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sum_{i=1}^N x_{i1}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sum_{i=1}^N x_{in}^2 \end{vmatrix}.$$

Прийнявши умову, що

$$X^t \tilde{Y} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N x_{i0} \tilde{y}_i \\ \sum_{i=1}^N x_{i1} \tilde{y}_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N x_{in} \tilde{y}_i \end{vmatrix},$$

а також, що матриця C^{-1} діагональна, вираз $(\hat{A} = C^{-1} X^t \tilde{Y})$ можна подати наступним чином:

$$\begin{vmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \dots \\ \hat{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N x_{i0} \tilde{y}_i / \sum_{i=1}^N x_{i0}^2 \\ \sum_{i=1}^N x_{i1} \tilde{y}_i / \sum_{i=1}^N x_{i1}^2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N x_{in} \tilde{y}_i / \sum_{i=1}^N x_{in}^2 \end{vmatrix}.$$

У результаті останній вираз, а значить, вираз $(\hat{A} = C^{-1} X^t \tilde{Y})$ розпадається на $(n+1)$ незалежних рівнянь, які дозволяють незалежно знаходити оцінки коефіцієнтів рівняння множинної регресії:

$$\hat{a}_j = \sum_{i=1}^N x_{ij} \tilde{y}_i / \sum_{i=1}^N x_{ij}^2, \quad j = \overline{0, n}. \quad (3.6)$$

Розглянемо, які властивості мають оцінки найменших квадратів коефіцієнтів рівняння множинної регресії, одержаних із матричного рівняння

$(\hat{A} = C^{-1} X^t \tilde{Y})$. Оскільки вважається, що похибки вимірювань вихідної величини є зміщеними, то математичне очікування матриці (точніше вектор – стовпчики) похибок дорівнює нулю $E[\varepsilon]=0$. Визначимо, чому дорівнює математичне очікування оцінки вектора коефіцієнтів \hat{A} , тобто

$$E[\hat{A}] = E[C^{-1} X^t \tilde{Y}] = C^{-1} X^t E[\tilde{Y}].$$

Взявши до уваги, що $\tilde{Y} = XA + \varepsilon$ і $E[\varepsilon]=0$, одержимо

$$E[\hat{A}] = C^{-1} X^t XA; \quad E[\hat{A}] = A,$$

тобто вектор \hat{A} є незміщеною оцінкою вектора A . Для визначення дисперсії одержаних оцінок коефіцієнтів скористуємося виразом (3.4), тоді

$$D[\hat{A}] = D[C^{-1} X^t \tilde{Y}].$$

Оскільки матриця $C^{-1} X^t$ детермінована, а \tilde{Y} - випадкова матриця, то можна записати

$$D[\hat{A}] = E[C^{-1} X^t \tilde{Y}, C^{-1} X^t \tilde{Y}] = C^{-1} X^t E[\tilde{Y}, \tilde{Y}] X C^{-1} = C^{-1} X^t D[\tilde{Y}] X C^{-1}. \quad (3.7)$$

Дисперсія спостережень (результатів вимірювань) визначається так:

$$D[\tilde{Y}] = D[XA + \varepsilon] = D[\varepsilon].$$

Якщо похибки вимірювання вихідної величини некорельовані і мають однакову дисперсію, тобто $cor[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = \delta_{ij} \sigma^2$, то $D[\varepsilon] = \sigma^2 l_n$, де l_n - одинична матриця.

Підставимо у вираз (3.7):

$$D[\hat{A}] = \sigma^2 C^{-1} X^t X C^{-1} = \sigma^2 C^{-1} \quad (3.8)$$

і одержимо, що коли як оцінку вектора A вибираємо саме вектор-стовпчик A (оцінку найменших квадратів), то дана оцінка має найменшу дисперсію. Якщо похибки ε_i незалежні і однаково розподілені, то \hat{A} до того ж є і ефективною.

Для випадку, коли похибки ε_i корельовані, $D[\varepsilon] = \sigma^2 W$, де W – відома, позитивно визначена матриця, тоді оцінка найменших квадратів для вектора A

$$\hat{A}^* = (X^t W^{-1} X)^{-1} X^t W^{-1} \tilde{Y}$$

і називається узагальненою оцінкою найменших квадратів, а для випадку, коли матриця W діагональна, то **зваженою оцінкою**.

Якщо матриця W діагональна з елементами W^{-1} , то зважена оцінка найменших квадратів для вектора A і дисперсія цієї оцінки визначаються так:

$$\hat{a}_j^* = \sum_{i=1}^N w_i \tilde{y}_i x_{ij} / \sum_{i=1}^N w_i x_{ij}^2; \quad D[\hat{a}_j^*] = \sigma^2 / \sum_{i=1}^N w_i x_{ij}^2.$$

3.6 Нелінійна регресія

До цього часу ми вважали, що математична модель, яка описує поведінку об'єму, який досліджується, лінійна і може бути представлена у вигляді

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^N x_i.$$

Проте уявлення про вид взаємозв'язку між величинами може бути невірним. Щоб підтвердити достовірність результатів, необхідно оцінити відхилення розрахованих значень вихідної величини, одержаних за результатами експерименту (спостережень), з цими експериментальними даними тобто оцінити величину, пропорційну $\sum (\tilde{y}_i - \hat{y}_i)^2$. Але для цього треба виконати спочатку вагому процедуру визначення оцінок коефіцієнтів \hat{a} , а потім, в гіршому випадку, пересвідчитись, що гіпотеза про вигляд моделі була вибрана невірно.

Можливий більш швидкий шлях оцінки відхилення залежності від лінійної. Він базується на визначенні коефіцієнтів детермінації (дисперсійного або кореляційного відношень). Розглянемо поле кореляції для парної залежності (див. рис. 3.5) і побудуємо в ньому лінію регресії, що задовольняє методу найменших квадратів. Для довільної точки з координатами (x_i, y_i) розглянемо повне відхилення вихідної величини від середнього значення (центру тяжіння). Відповідно до рис. 3.5 для даної i -ї точки можна записати $(\tilde{y}_i - \bar{y})^2 = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (\tilde{y}_i - \hat{y}_i)$. Віднесемо в квадрат

$$(\tilde{y}_i - \bar{y})^2 = (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + 2(\hat{y}_i - \bar{y})(\tilde{y}_i - \hat{y}_i) + (\tilde{y}_i - \hat{y}_i)^2.$$

Для всієї сукупності точок поля кореляції

$$\sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + 2 \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})(\tilde{y}_i - \hat{y}_i) + \sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \hat{y}_i)^2.$$

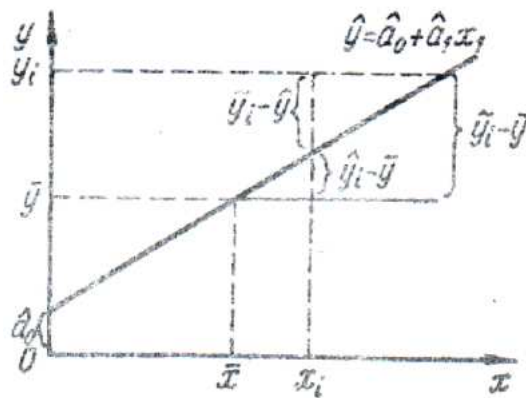


Рис. 3.5 - Побудова лінії регресії і визначення повної дисперсії вихідної величини

У разі некорельованості систематичних $(\hat{y}_i - \bar{y})$ і випадкових $(\tilde{y}_i - \bar{y})$ відхилень друга в правій частині дорівнюватиме

$$\sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \hat{y}_i)^2. \quad (3.9)$$

Розділивши на $(N-1)$, одержимо вираз для повної дисперсії вихідної величини, що складається із дисперсії умовного математичного очікування і середньої умовної дисперсії.

Перша складова у правій частині характеризує розсіяння впливу вхідної величини, що досліджується, тобто є дисперсією, «що пояснюється», оскільки $(\hat{y}_i - \bar{y})$ залежить від рівняння регресії і, відповідно, зумовлено регресійним зв'язком. Відхилення $(\tilde{y}_i - \hat{y}_i)$ варіюються випадковим чином і не можуть бути пояснені моделлю, тобто ці відхилення відображають вплив випадкових факторів. До випадкових в даному випадку відносяться невраховані фактори, а також високі ступені або комбінації врахованих факторів.

Із наведеної трактовки випливає, що дисперсія умовного математичного очікування може служити характеристикою ступеня зв'язку між вхідною і вихідними змінними, а умовна дисперсія характеристичного ступеня

невизначеності, неідентичності, кількісно характеризується неадекватністю даної моделі через неврахування інших факторів моделі, крім x .

Коефіцієнт детермінації регресії визначиться як відношення суми квадратів пояснених відхилень (дисперсії умовною математичного очікування) до всієї суми квадратів відхилень (дисперсії вихідної величини) виразу, тобто

$$R_{y/x}^2 = \sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \bar{y})^2 / \sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \bar{y})^2 = 1 - \left[\sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \hat{y}_i)^2 / \sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \bar{y})^2 \right]$$

Із аналізу останнього виразу випливає, що $R_{y/x}^2$ прагне до одиниці, коли

$$\sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \hat{y}_i)^2 \text{ прагне до } 0. \text{ Це свідчить про те, що величини, які досліджуються,}$$

пов'язані функціональним зв'язком, а розкид вихідних величин \tilde{y}_i пов'язаний, наприклад, із випадковою похибкою їх вимірювання. Із цього ж виразу виходить, що коефіцієнт детермінації буде дорівнювати нулю тільки в тому разі, коли

$$\sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \bar{y})^2 \quad],$$

тобто коли розсіяння біля лінії регресії \hat{y}_i дорівнюють розсіянню біля загального середнього \bar{y} при будь-якому x_i . Це може бути, якщо вхідна і вихідна величини незалежні.

Із цього випливає, що $R_{y/x}^2 = 0$, якщо вхідна і вихідна величини об'єкта що досліджується, незалежні, проте отримане твердження не завжди буде вірним. У загальному випадку коефіцієнт детермінації регресії лежить в межах

$$0 \leq R_{y/x}^2 \leq 1$$

і інтерпретує кількісну характеристику міри невизначеності випадкової величини Y за значеннями випадкової величини X . На відміну від коефіцієнта кореляції, коефіцієнт детермінації несиметричний по відношенню до змінних, що досліджуються, тобто $R_{y/x}^2 \neq R_{x,y}^2$. У регресіях з детермінованими незалежними змінними коефіцієнт детермінації необхідно трактувати тільки як показник, що відображає, наскільки модель регресії краще моделі середнього.

Взаємозв'язок між коефіцієнтами кореляції і детермінації залишається таким:

$$r_{x,y}^2 \leq R_{y/x}^2 \quad (3.10)$$

Рівність тут виконується лише в тому випадку, коли є строга лінійна залежність Y на X , тобто $\hat{y} = M[Y/x]$. Із нерівності виходить, що кількісна характеристика стохастичного зв'язку X і Y , виміряна коефіцієнтом детермінації, може бути більше нуля у випадку нульового коефіцієнта кореляції. Відомо, що коефіцієнт кореляції при двовірному нормальному розподілу має сенс тільки при лінійному зв'язку. Тому можна використовувати співвідношення між коефіцієнтами кореляції і детермінації, щоб оцінити правильність вибору лінійної моделі.

Розглянемо статистику [С.А. Айвазян. Статистические исследования зависимости.-М.: Металлургия, 1968.-182с.]

$$W = (\sum_{i=1}^N m_i - N)(R_{y/x}^2 - \hat{r}^2) / (N-2)(1 - R_{y/x}^2) = \sum_{i=1}^N m_i (\tilde{y}_i - \hat{y}_i) / (N-2) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} (\tilde{y}_i - \bar{y})^2,$$

яка пропорційна сумі відхилень групових середніх \tilde{y}_i від прямої регресії, поділеної на суму відхилень \tilde{y}_{ij} від загального середнього. Вона має F - розподіл Фішера з $f_1=(N-2)$ і $f_2=(\sum m_i - N)$ ступенями свободи. Тут N - число точок (значень x_i), в яких проводились дослід; m_i - кратність проведення дослідів в i -й точці, $\bar{y}_i = 1/m_i \sum \tilde{y}_{ij}$ - середнє значення вихідної величини, виміряне для i -ї точки, $\bar{y} = \sum m_i \bar{y}_i / N$ - загальне середнє значення вихідної величини. Знайдене значення W порівнюється з табличним значенням F_t при вибраному рівні статистичної значущості α і числі ступенів свободи f_1 і f_2 . Якщо $W > F_t$, то гіпотеза про лінійність зв'язку між вхідною і вихідною величинами з вибраним рівнем статистичної значущості відкидається.

Переконавшись, що при статистичній обробці результатів експерименту лінійна модель неадекватна об'єкту, що досліджується, або ж коли при графічному зображенні поля кореляції видно, що залежність явно нелінійна,

необхідно висунути гіпотезу, наприклад при однофакторному експерименті, про квадратичну парну залежність вигляду

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_{11} x_1^2.$$

При цьому слід пам'ятати, що мова йде про нелінійну залежність за факторами, але лінійну за параметрами. Одержати оцінки коефіцієнтів парної квадратичної регресії можна на основі системи нормальних рівнянь для множинного лінійного регресійного аналізу, підставивши $d \rightarrow d$ і лінійного $X_2 \rightarrow X_1^2$, тобто

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_0 \sum_{i=1}^N x_{i0}^2 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^N x_{i0} x_{i1} + \hat{a}_{11} \sum_{i=1}^N x_{i0} x_{i1}^2 &= \sum_{i=1}^N x_{i0} \tilde{y}_i; \\ \hat{a}_0 \sum_{i=1}^N x_{i0} x_{i1} + x_{i0} x_{i1} \sum_{i=1}^N x_{i0}^2 + \hat{a}_{11} \sum_{i=1}^N x_{i1} x_{i1}^2 &= \sum_{i=1}^N x_{i1} \hat{y}_i; \\ \hat{a}_0 \sum_{i=1}^N x_{i0} x_{i1}^2 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^N x_{i1} x_{i1}^2 + \hat{a}_{11} \sum_{i=1}^N x_{i1} x_{i1}^2 &= \sum_{i=1}^N x_{i1}^2 \hat{y}_i. \end{aligned} \right\}.$$

Вирішивши цю систему рівнянь, одержимо оцінку коефіцієнтів парної квадратичної моделі. Користуючись відомою властивістю системи нормальних рівнянь, можна записати систему рівнянь для одержання оцінок коефіцієнтів парної залежності будь-якого порядку. Проте при виконанні операцій зведення в ступінь для одержання формул порядку вище четвертого ступеня, похибки округлення стають настільки великими, що зводиться нанівець вигравш від підвищення порядку регресії (про цю обставину не треба забувати).

Викладений вище підхід поширюється і на регресійний аналіз, коли модель містить фактори в другому й вище ступені.

4. АКТИВНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

4.1 Ортогональні плани першого порядку

Активний експеримент на відміну від пасивного полягає не в простій фіксації вхідних і вихідних величин з наступною статистичною обробкою, а в активному втручанні в хід процесу або активній дії на об'єкт за раніше вибраним планом. План експерименту передбачає умови і числа проведення

дослідів i , головним чином, вимагає точної одержаної в результаті експерименту математичної моделі. Математична модель одержується на основі проведення регресійного аналізу.

Розглянемо приклад, що ілюструє ефективність активного експерименту. Нехай за допомогою звичайних двочашкових ваг нетреба зважити три предмети. Шаблонний підхід до проведення експерименту полягає в наступному: використовуються чотири вимірювання, в першому з яких на чашку вагів нічого не кладеться (оцінюється систематична похибка зважування), а потім предмет зважується по черзі.

Введемо позначення:

X_0 - систематична похибка вагів,

X_i - вага i -го предмета, $i=1,2,3$,

ξ_i - випадкова похибка i -го зважування $i = 0,1,2,3$.

Вважається, що кожні вимірювання супроводжуються випадковою похибкою з дисперсією. Схема проведення експерименту зображена в табл. 4.1.

Обробка результатів зважування проводиться наступним чином. Нехай y_i - результат i -го зважування, $i=1,2,3$. При цьому

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 + \xi_0, & y_1 &= x_0 + x_1 + \xi_1, \\ y_2 &= x_0 + x_2 + \xi_2, & y_3 &= x_0 + x_3 + \xi_3. \end{aligned}$$

Таблиця 4.1

№ зважування	X_0	X_1	X_2	X_3
1	+			
2	+	+		
3	+		+	
4	+			+

Тоді оцінку ваги кожного з предметів одержимо за формулами:

$$\begin{aligned}\hat{x}_0 &= y_0 = x_0 + \xi_0, & \hat{x}_1 &= y_1 - y_0 = x_1 + \xi_1 - \xi_0; \\ \hat{x}_2 &= y_2 - y_0 = x_2 + \xi_2 - \xi_0, & \hat{x}_3 &= y_3 - y_0 = x_3 + \xi_3 - \xi_0.\end{aligned}$$

Дисперсія похибок в оцінюванні ваги предмета дорівнює:

$$D_1(x_0) = \sigma^2, D_1(\hat{x}_1) = D_2(\hat{x}_2) = D_1(\hat{x}_3) = 2\sigma^2.$$

З іншого боку, експеримент по зважуванню предметів можна організувати інакше. При першому зважуванні покласти всі три предмети на одну чашку вагів і виконати їх зважування. У другому зважуванні ці три предмети розподіляємо на чашках наступним чином: перший з них помістимо на одну чашку, а два других – на другу. Наступні два зважування проведемо аналогічно, відокремивши спочатку другий предмет із групи, а потім - третій.

Схема проведення такого експерименту зображена в таблиці 4.2.

Обробку результатів зважування виконуємо аналогічно попередньому

При цьому:

$$y_0 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \xi_0,$$

$$y_1 = x_0 + x_1 - x_2 - x_3 + \xi_1,$$

$$y_2 = x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \xi_2,$$

$$y_3 = x_0 - x_1 - x_2 + x_3 + \xi_3.$$

Таблиця 4.2

№ зважування	X_0	X_1	X_2	X_3
1	+	+	+	+
2	+	+	-	-
3	+	-	+	-
4	+	-	-	+

Звідси

$$\hat{x}_0 = \frac{1}{4}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = x_0 + \frac{1}{4}(\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3),$$

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{4}(y_0 + y_1 - y_2 - y_3) = x_1 + \frac{1}{4}(\xi_0 + \xi_1 - \xi_2 - \xi_3),$$

$$\hat{x}_2 = \frac{1}{4}(y_0 - y_1 + y_2 - y_3) = x_2 + \frac{1}{4}(\xi_0 - \xi_1 + \xi_2 - \xi_3),$$

$$\hat{x}_3 = \frac{1}{4}(y_0 - y_1 - y_2 + y_3) = x_3 + \frac{1}{4}(\xi_0 - \xi_1 - \xi_2 + \xi_3).$$

Тоді дисперсія похибок в оцінюванні предметів дорівнюватиме:

$$D_2(\hat{x}_0) = D_2(\hat{x}_1) = D_2(\hat{x}_2) = D_2(\hat{x}_3) = \frac{1}{4}\sigma^2.$$

Розрахуємо виграш у точності яких одержані за рахунок більш раціональної організації експерименту:

$$\eta = \frac{D_1(\hat{x}_i)}{D_2(\hat{x}_i)} = 8, \quad i=1, 2, 3.$$

Якщо б в експерименті необхідно було провести зважування n предметів, то виграш в точності такий: при одній і тій же кількості зважувань була б 2^n .

Для реалізації активного експерименту треба виконати наступні умови:

Результати спостережень $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ повинні являти собою незалежні, нормально розподілені випадкові величини:

випадкові перешкоди ε_i на виході об'єкта в кожному i -му досліді повинні бути незалежні одна від одної, а також від значення вхідних змінних x_j і коефіцієнтів рівняння регресії $a_j \left(j = 1, n \right)$;

дисперсії спостереження вихідної величини повинні дорівнювати одна одній (виборочні оцінки $S^2\{\bar{y}_i\}$ однорідні) або, іншими словами, якщо виконувати багаторазові повторні спостереження над величиною y_i при деякому визначеному наборі значень $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$, то дисперсія $\sigma^2\{y_i\}$ не повинна відрізнятися від дисперсії $\sigma^2\{y_k\}$, одержаної при повторних

спостереженнях для будь-якого іншого набору значень незалежних змінних $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}$;

незалежні змінні x_1, x_2, \dots, x_n повинні вимірюватися з нехтуючи малою похибкою у порівнянні з визначенням.

Ці дані умови свідчать, що між вхідними і вихідними величинами існує функціональний зв'язок і метою експерименту є визначення оцінок параметрів, які будуть відрізнятися від їх математичного очікування через наявність похибок вимірювання вихідної величини, а також вплив неврахованих некерованих факторів.

4.2 Повний факторний експеримент

У факторних експериментах на відміну від класичних відбуваються одночасно варіювання всіма незалежними змінними. Експеримент, у результаті якого всі незалежні змінні варіюються на всіх вибраних рівнях, називається повним факторним експериментом (ПФЕ).

Кількість дослідів при ПФЕ підраховується так:

$$N = k^n,$$

де k – кількість рівнів, n – число факторів.

Оскільки фактори різні за фізичною природою і змінюються в різних динамічних діапазонах, для подальшої формалізації процесу аналізу і незалежності одержаних результатів від зміни масштабу вхідних величин фактори попередньо кодують. Для цього використовують співвідношення:

$$x_i = \frac{X_i - X_{icc}}{X_{imax} - X_{icc}} = \frac{X_i - X_{icc}}{X_{icc} - X_{imin}}, \quad (4.1)$$

де $X_{icc} = \frac{(X_{imax} + X_{imin})}{2}$, X_{imax} , X_{imin} – граничні значення у рівняннях незалежних змінних.

Таким чином операція кодування незалежних змінних обчислюється в переносі центру координат в точку x_{icp} , що називається в подальшому центром плану експерименту

У кодованій системі на основі (4.1) будуть додержуватись відповідності:

$$x_{i\min} \rightarrow x_i = -1; \quad x_{icp} \rightarrow x_i = 0;$$

$$x_{i\max} \rightarrow x_i = 1.$$

У подальшому будуть використовуватися кодовані змінні.

У разі парної залежності для визначення лінії регресії достатньо провести два досліди при граничних значеннях фактора x_1 , тобто план експерименту має вигляд $X = [-1; +1]^t$. Якщо число вхідних величин дві - x_1 і x_2 , тобто реалізується двох факторний експеримент, то для побудови матриці плану повного факторного експерименту, який дозволяє оцінити коефіцієнти моделі $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$, необхідно користуватись наступним правилом: при додаванні нового фактора кожна комбінація рівнів вихідного плану зустрічається двічі - в сполученні з нижнім (-1) і верхнім (+1) рівнями нового фактора. Іншими словами, матриці вихідного плану (однофакторного експерименту) треба повторити двічі - при нижньому рівні ($x_2 = -1$) і верхньому рівні ($x_2 = +1$) доданого фактора. Виходячи з цього, правила, можна побудувати і матрицю плану і трифакторного експерименту.

У табл. 4.3 показана поетапна побудова матриці плану в міру збільшення числа факторів.

Таблиця 4.3

№ п\п.	X_1	X_2	X_3	№ п\п.	X_1	X_2	X_3
1	-1	-1	-1	1	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1	2	+1	-1	+1
3	-1	+1	-1	3	-1	+1	+1
4	+1	+1	-1	4	+1	+1	+1

Якщо розглянути матрицю дво факторного експерименту, побудованого за прийнятим вище правилом, то видно, що в ній присутні всі $N = 2^2 = 4$ сполучення факторів x_1 і x_2 : “-” і “-”; “+” і “-”; “-” і “+”; “+” і “+”.

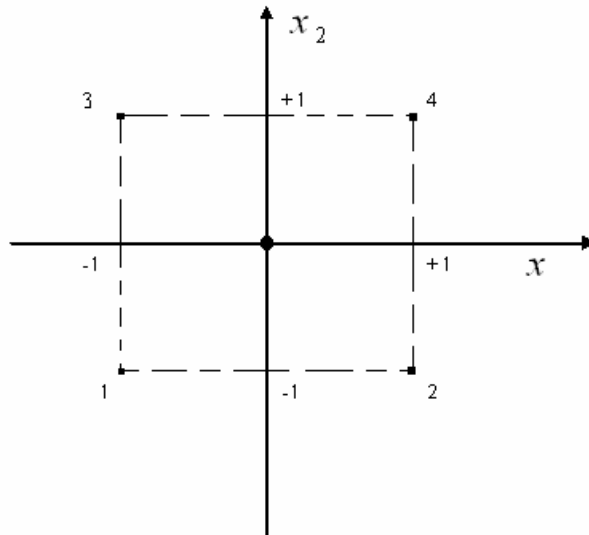


Рис. 4.1 - Розташування точок за ПФЕ 2^n у факторній площині

Геометричний план такого експерименту інтерпретується точками, розташованими у вершинах квадрату.

Побудована таким чином матриця має ряд важливих якостей:

1) ортогональність, що забезпечує незалежність оцінок коефіцієнтів моделі:

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} \cdot x_{ik} = 0; \quad j \neq k; \quad j = 1, n^-,$$

де $j, k = 1, n^-$ - номери вектор-стовпців відповідних факторів; i - планна точка факторного простору, в якому проводиться експеримент. Іншими словами, дану властивість можна сформулювати так: скалярний добуток вектор-стовпців матриці планування дорівнює нулю;

2) симетричність, що забезпечує незалежність вільного числа:

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = 0; \quad j = 1, n^-,$$

тобто сума елементів вектор-стовпців x_j дорівнює нулю, точки, в яких проводяться досліди, розташовані симетрично по відношенню до центру плану;

3) нормування, що забезпечує однакову дисперсію оцінки коефіцієнтів:

$$\sum_{i=1}^N x_{ij}^2 = N.$$

Остання рівність впливає із того, що кодовані фактори набувають тільки значення ± 1 .

Розрахунок і статистична оцінка коефіцієнтів рівняння регресії, одержаного на основі плану ПФЕ, засновані, як і при пасивному експерименті, на застосуванні регресійного аналізу. З огляду на те, що матриця плану має властивості ортогональності, всі розрахунки дуже спрощуються. Це зумовлено тим, коваріаційна матриця C^{-1} у виразі для визначення оцінок коефіцієнтів

$$A = C^{-1} X' \bar{Y}$$

виявляється діагональною, що приводить до системи незалежних оцінок коефіцієнтів рівняння регресії:

$$\hat{a}_j = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_{ij} \tilde{y}_i}{N}}{\sum_{i=1}^N x_{ij}^2}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.2)$$

Кожний коефіцієнт розраховується незалежно від інших, причому загальне число коефіцієнтів не повинно перевищувати числа рівнянь, з яких вони визначались, а це число співпадає з числом рядків матриці планування, що визначається співвідношенням $N = 2^n$.

Згідно з властивістю нормування матриці плану повного факторного експерименту вираз для визначення оцінки коефіцієнта рівняння регресії при дворівневому експерименті остаточно запишеться у вигляді

$$\hat{\alpha}_j = \sum_{i=1}^N \frac{x_{ij} \tilde{y}_i}{N}. \quad (4.3)$$

Так, якщо відповідно до матриці плану дво факторного експерименту були одержані вихідні величини $Y = \left[\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{y}_4 \right]'$, то оцінки коефіцієнтів при факторах запишуться так:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{4} (-y_1^- + y_2^- - y_3 + y_4^-);$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{1}{4} (-y_1^- - y_2^- + y_3 + y_4^-).$$

Отже значення \tilde{y}_i одержане в результаті проведення досліду в i -й точці факторного простору (згідно з i -м рядком матриці плану), береться зі знаком, відповідним знаку рівня вимірювання j -го фактора, коефіцієнт при якому обчислюється для даного i -го рядка матриці планування. Так,

$$x_{11}\tilde{y}_1 = (-1)\tilde{y}_1; x_{21}\tilde{y}_2 = (+1)\tilde{y}_2; x_{31}\tilde{y}_3 = (-1)\tilde{y}_3 \text{ і т.д.}$$

Таблиця 4.4

№ _{п/п}	X ₀	X ₁	X ₂	X ₁ X ₂	\tilde{y}_i
1	+1	-1	-1	+1	\tilde{y}_1
2	+1	+1	-1	-1	\tilde{y}_2
3	+1	-1	+1	-1	\tilde{y}_3
4	+1	+1	+1	+1	\tilde{y}_4

Якщо в кожній точці факторного простору дослід проводиться m раз, то вираз (4.3) зміниться:

$$\hat{a}_j = \sum_{i=1}^N x_{ij} \bar{y}_i / N, \quad (4.4)$$

де $\bar{y}_i = \sum_{k=1}^m \tilde{y}_{ik} / m$ - “середнє рядкове” значення вихідної величини об’єкта в i -му рядку матриці плану.

Для визначення оцінки коефіцієнта a_0 необхідно матрицю плану доповнити вектор-стовпчиком фіктивної змінної x_0 , тобто ж, рівній одиниці, як це показано в табл. 4.4.

Зважаючи на те, що вектор-стовпчик матриці плану задовольняє умові симетричності, то

$$\sum_{i=1}^N X_{ij} X_{io} = \sum_{i=1}^N X_{ij} = 0; \quad j = \bar{1}, \bar{n}$$

Таким чином, вектор-стовпчик фіктивної змінної буде ортогональним вектор-стовпчикам незалежних змінних, тому оцінка вільного члена буде визначатися незалежно від оцінок \hat{a}_j відповідно до виразу (4.3):

$$\hat{a}_0 = \frac{\sum_{i=1}^N X_{i0} \tilde{y}_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \tilde{y}_i}{N}.$$

Якщо модель містить лінійні парні взаємодії, факторів $x_j x_k$, то для визначення оцінок коефіцієнтів при них матриця плану доповнюється вектор-стовпчиком для взаємодії. Причому чергування знаків у цьому векторі-стовпчику одержують шляхом перемножування знаків вектор-стовпчика $x_j x_k$.

У табл. 4.4 показана процедура визначення оцінки коефіцієнта a_{12} при взаємодії $x_1 x_2$. Отриманий таким чином вектор-стовпчик буде мати три перелічені властивості матриці планування - ортогональність, симетричність і нормування. Таким чином, оцінка коефіцієнта при лінійній взаємодії знаходиться незалежно на основі того ж виразу (4.3):

$$\hat{a}_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_{ji} X_{ki})}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N X_{ji} X_{ki}}{N}.$$

Знайдені таким чином оцінки коефіцієнтів моделі показують ступінь впливу факторів і їх взаємодії на вихідну величину. Якщо перед коефіцієнтом стоїть знак плюс, то із збільшенням даного фактора вихідна величина збільшується, а якщо знак мінус, то навпаки.

4.3 Дисперсія відтворюваності

Вона визначається на основі даних паралельних дослідів (повторень експерименту) і характеризує однорідність дисперсії (рівноточність) у всіх дослідах. Звичайно критерієм рівноточності служить відношення максимальної дисперсії у відповідній дослідній точці $D_{y_{\max}}$ до суми всіх дисперсій в N дослідних точках:

$$G = \frac{D_{y_{\max}}}{\sum_{i=1}^N D_{y_i}},$$

де
$$D_{y_i} = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y}_i);$$

$$\bar{y}_i = \sum_{j=1}^m y_{ij};$$

m – число паралельних дослідів в i -тій точці.

Отримані значення G , яке іноді називають критерієм Кохрена, порівнюється з табличним G_T , визначеним для числа ступенів свободи $m-1$, N для прийнятого рівня значущості (частіш за все 0,05).

Якщо дисперсія досліду $G < G_T$, то гіпотеза про рівноточність не відкидається.

Тоді дисперсію досліду (середня дисперсія) знаходять за формулою

$$D_{\bar{y}_0} = \frac{1}{mN} \sum_{i=1}^N D_{y_i},$$

де $mN = n$ – загальна кількість вимірювань.

4.4 Оцінка адекватності апроксимуючої залежності досліджуваного об'єкта

Оцінка адекватності звичайно проводиться за допомогою критерію Фішера, який являє собою відношення дисперсії адекватності (залишкової дисперсії) D_{y_a} до дисперсії досліду $D_{\bar{y}_0}$:

$$F = \frac{D_{y_a}}{D_{\bar{y}_0}},$$

де
$$D_{y_a} = \frac{1}{N-S} \sum_{i=1}^N (y_{P_i} - y_i)^2;$$

S – кількість параметрів апроксимуючої залежності;

y_{P_i} - розраховане значення функції в i -тій точці при апроксимації її залежністю виду $y = f(x_1, x_2, \dots)$.

Отримане значення F порівнюється з табличним F_T , встановленим для ступенів свободи $r_1 = N - S$; $r_2 = N(m-1)$ для прийнятого рівня значущості. Якщо $F < F_T$, то гіпотеза про адекватність не відкидається. Підкреслимо, що перевірка

адекватності за допомогою F критерію можлива тільки при $r_1 > 1$, тобто число дослідних точок N повинно перевищувати число членів апроксимуючого полінома.

Відзначимо, що коли похибка досліду, що визначає D_{y_0} відома апріорі, то при $D_{y_0} \leq D_{y_0}$ модель адекватна.

Попередня перевірка адекватності відтворювання досліджуваного процесу знайденої апроксимуючої залежності може бути реалізована порівнянням дисперсії адекватності D_{y_a} із значенням дисперсії вихідної величини відносно середнього:

$$D_y = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2,$$

де $n = mN$; $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$.

Якщо $D_{y_a} < 0.1D_y$ адекватність відтворювання можна вважати задовільною. Кожен експериментальний результат повинен бути статистично представницьким, тобто обчисленим на основі декількох вимірювань. Проте, враховуючи, що застосування МНК забезпечує більш високу достовірність вимірювань (оскільки надійність всієї кривої вище, ніж надійність будь-якої складової), значення величини D_{y_0} можна знайти в будь-якій точці. Для інших точок достатньо поставити один – три досліди і знайти середнє значення (один дослід проводиться при кількості точок $N > 20$ і при високій точності вимірювання величини y).

4.5 Оцінка значущості коефіцієнтів апроксимуючої залежності, взятій у вигляді алгебраїчного полінома, в сенсі відмінності значень цих коефіцієнтів від нуля

Таку оцінку виконують окремо для кожного коефіцієнта a_i за допомогою критерію Стюдента:

$$t_i = \frac{|a_i|}{\sigma_{a_i}}, \sigma_{a_i} = \sqrt{D_{a_i}},$$

де D_{a_i} - дисперсія коефіцієнта регресії a_i .

Величину D_{a_i} визначають наступним чином. Вирішують систему нормальних рівнянь відносно коефіцієнтів a_i , але при цьому праві частини рівнянь $v_i = \sum_{i=1}^N y_i x_i$ не заміняють їх числовими значеннями. У результаті вирішення для коефіцієнтів a_i знаходять лінійні залежності від величин v_i . Якщо в ці залежності підставити числові величини v_i , то отримаємо числові коефіцієнти a_i . Якщо ж в них підставити замість v_i одиницю, а замість інших v_i нуль, то можна отримати для кожного a_i значення M_i , за допомогою якого і знаходиться D_{a_i}

$$D_{a_i} = M_i D_{y_0}$$

Зокрема, при лінійній залежності $y = a_0 + a_1 x$ і умові $\sum_{i=1}^N x_i = 0$ (цього завжди можна досягти, якщо прийняти середньоарифметичну величину x за початок відрахунку) залежність має вигляді

$$a_0 = \frac{v_0}{N}; a_1 = \frac{v_1}{\sum_{i=1}^N x_i^2}.$$

Тоді при $v_i = 1$ маємо $M_0 = N^{-1}$:

$$M_1 = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{-1}.$$

Можна тоді записати

$$D_{a_0} = \frac{D_{y_0}}{N}, D_{a_1} = \frac{D_{y_0}}{\sum_{i=1}^N x_i^2}.$$

Значення t_i , встановлене за формулою, порівнюємо з табличним t_T знайденим для числа ступенів свободи $\nu = N(m-1)$ для прийнятого рівня значущості.

Якщо $t_e > t_T$, коефіцієнт a_e вважається незначним (тобто можна прийняти $a_e = 0$) і відповідна складова вираховується з рівняння регресії.

Відмітимо, що при $m = 1$ маємо $v = 0$ і розглянутий метод оцінки не можна застосовувати. У цьому випадку оцінка значущості коефіцієнта може бути виконана шляхом порівняння дисперсії адекватності D_{y_a} при наявності члена апроксимуючого полінома з коефіцієнтом a_i і за його відсутності. Якщо дисперсія для другого варіанта близька до дисперсії для першого (або менше), то розглядуваний коефіцієнт можна вважати незначним.

4.6 Обробка результатів експерименту

Основною метою регресійного аналізу є одержання за результатами активного експерименту моделі, що адекватно описує поведінку досліджуваного об'єкту. Проведення експерименту повинно строго відповідати обраному випадковому порядку.

Коли є сумнів, що умови проведення дослідів залишаються постійними, то досліді в кожній точці факторного простору дублюються (проводиться серія дослідів).

Припустимо, що в кожній точці факторного простору, якій відповідає один з рядків матриці планування проводять серії із m дослідів. Для будь-якої i -точки обчислюють середнє значення вихідної величини:

$$\bar{y}_i = \sum_{u=1}^m \tilde{y}_{iu} / m$$

і рядкову дисперсію вихідної величини (точніше її оцінку):

$$S^2\{y_i\} = \sum_{u=1}^m (y_{iu} - \bar{y}_i)^2 / m - 1.$$

Знайдені таким чином рядкові дисперсії використовують для перевірки відтворюваності дослідів, яка полягає в перевірці однорідності рядкових дисперсій – однієї з основних передумов множинного регресійного аналізу.

У подальшому будемо розглядати етапи обробки результатів експерименту на прикладі 2^x факторного експерименту (табл. 4.5).

Таблиця 4.5

№ _{п/п}	X ₀	x ₁	x ₂	x ₁ x ₂	y _{1i}	y _{2i}	y _{3i}	\bar{y}_i	S ² {y _i }
1	+1	-1	-1	+1	43	35	48	42	43
2	+1	+1	-1	-1	90	86	94	90	16
3	+1	-1	+1	-1	10	16	16	14	12
4	+1	+1	+1	+1	56	54	58	56	4

Знайдемо середні значення вихідної величини \bar{y}_i (m=3):

$$\bar{y}_1 = (43 + 35 + 48) / 3 = 42;$$

$$\bar{y}_2 = (90 + 86 + 96) / 3 = 90;$$

$$\bar{y}_3 = (10 + 16 + 16) / 3 = 14;$$

$$\bar{y}_4 = (56 + 54 + 58) / 3 = 56,$$

а також рядкову дисперсію вихідної величини:

$$S^2\{y_1\} = [(43 - 42)^2 + (35 - 42)^2 + (48 - 42)^2] / 2 = 43;$$

$$S^2\{y_2\} = [(90 - 90)^2 + (86 - 90)^2 + (94 - 90)^2] / 2 = 16;$$

$$S^2\{y_3\} = [(10 - 14)^2 + (16 - 14)^2 + (16 - 14)^2] / 2 = 12;$$

$$S^2\{y_4\} = [(56 - 56)^2 + (54 - 56)^2 + (58 - 56)^2] / 2 = 4.$$

Серед усієї сукупності розрахованих рядкових дисперсій визначаємо максимальне $S^2\{y_i\}_{\text{MAX}}$ і беремо відношення даної дисперсії з суми всіх рядкових дисперсій $S^2\{y_i\}$, тобто знаходимо коефіцієнт Кохрена:

$$G_p = S^2\{y_i\}_{\text{MAX}} / \sum_{i=1}^N S^2\{y_i\}.$$

У разі ідеальної однорідності коефіцієнт G_p прагне до значення $1/N$.

Розрахункове значення коефіцієнта Кохрена порівнюємо з табличним (критичного G-критерію), яке вибираємо із таблиці для прийнятого рівня

значущості α і для чисел ступеня свободи $f_1=m-1$, $f_2=N$. Знаходимо розрахункове значення $G_p=43/(43+16+12+4)=0,57$.

Згідно з таблицею для $\alpha=0,05$, $f_1=2$, $f_2=4$. Знаходимо $G_T=0.77$;

$G_T > G_p$, тобто умова виконується.

Пересвідчившись в однорідності, перейдемо до визначення оцінок коефіцієнтів за формулою

$$\hat{a}_n = \sum_{i=1}^N y_{in} x_{in} / N,$$

де n-номер вектор-стовпчика. Одержимо

$$\hat{a}_0 = (42+90+14+56)/4=50,5;$$

$$\hat{a}_1 = (-42+90-14+56)/4=22,5;$$

$$\hat{a}_2 = (-42-90+14+56)/4=-15,5;$$

$$\hat{a}_{12} = (42-90-14+58)/4=1,8.$$

Знайдені таким чином коефіцієнти рівняння регресії необхідно оцінити на статистичну значущість. Оцінка виконуємо за t- критерієм Ст'юдента. Для кожного коефіцієнта \hat{a}_n обчислюємо коефіцієнт $t = |\hat{a}_n - a_n| / S(a_n)$, тобто перевіряємо відхилення від нуля знайденої оцінки a_n .

Тут $S\{\hat{a}_n\}$ - оцінка середнього відхилення похибки визначення коефіцієнта.

Оцінка дисперсії коефіцієнтів, знайдених за експериментальними даними:

$$S^2\{\hat{a}_k\} = S^2\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ik} \bar{y}_i\right\} = \frac{1}{N^2} S^2\left\{\sum_{i=1}^N x_{ik} \bar{y}_i\right\}.$$

Беремо до уваги, що x_{in} у всіх дослідах в кодованому вигляді приймає значення +1 або - 1, тому для випадку незалежних випадкових величин $x_{in} \bar{y}_i$ знак під знаком суми не впливає на результат. Крім того відомо, що дисперсії середнього \bar{y}_i в m - разів менше дисперсії одного вимірювання (m- кратність проведення дослідів), тобто

$$S^2\{\bar{y}_i\} = S^2\{y_i\}/m = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(m-1)} \sum_{k=1}^m (\tilde{y}_{ik} - \bar{y}_i)^2.$$

На основі вищесказаного і з урахуванням однорідності рядкових дисперсій можна записати

$$S^2\{\hat{a}_k\} = \frac{1}{N^2 m} \cdot \frac{1}{(m-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^m (\tilde{y}_{iu} - \bar{y}_i)^2.$$

Оцінка генеральної дисперсії відтворюваності S_ϵ^2 , що характеризує точність (усереднення) одного вимірювання, є середнє з усіх рядкових дисперсій:

$$S_b^2 = \frac{N}{Z!} S^2\{y_i\} / N,$$

або

$$S_\epsilon^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^m (\tilde{y}_{iu} - \bar{y}_i)^2 / N(m-1).$$

Таким чином, оцінку дисперсії коефіцієнта \hat{a}_n можна записати у вигляді

$$S^2\{\hat{a}_n\} = S_b^2 / N \cdot m.$$

У деяких випадках, коли є впевненість, що дисперсії однорідні, оцінкою дисперсії відтворюваності може служити одна з рядкових дисперсій або оцінка дисперсії для будь-якої точки факторного простору (точніш за все це буває центр плану).

Коли число паралельних дослідів у кожній точці факторного простору різне, при усередненні однорідних дисперсій для оцінки дисперсії відтворюваності користуються середньозваженим значенням дисперсій, узятих з урахуванням ступенів свободи

$$S_\epsilon^2 = (\sum_{i=1}^N S^2\{y_i\} f_i) / \sum_{i=1}^N f_i,$$

де- $f_i = m_i - 1$ - число ступенів свободи в і-му досліді, m - число паралельних дослідів.

Суть t- критерію Ст'юдента перевірки статистичної значущості знайдених оцінок коефіцієнтів полягає в наступному. Зміна вихідної величини залежить від впливу кожного члена апроксимуючого поліному і некерованих та неконтрольованих факторів.

Вплив n-го фактора, відхилення оцінки n-го коефіцієнта від нуля враховується коефіцієнтом $t_n = \left| a_n \right| / S(\hat{a}_n)$, вплив же некерованих і неконтрольованих факторів, а також похибки вимірювання вихідної величини можуть бути враховані за допомогою дисперсії відтворюваності S_e^2 , яка має $N(m-1)$ ступенів свободи (N-ступенів загублено при обчисленні рядкових середніх). При вибраному рівні статистичної значущості: α за таблицями розподілу Ст'юдента при числі ступенів свободи $f = N(m-1)$ знаходять табличне значення коефіцієнта $t_{\text{табл.}}$. Знайдене табличне значення порівнюють з розрахованим табличним значенням коефіцієнта. Якщо виконується нерівність

$$t_{\text{табл.}} > t_n,$$

то приймається нуль-гіпотеза, тобто при обраному рівні статистичної значущості α (статистичної достовірності $1-\alpha$) і числі ступенів свободи f вважається, що знайдений коефіцієнт \hat{a}_n є статистично незначним і його необхідно виключити із рівняння регресії.

Таким чином, при виконанні умови ($t_{\text{табл.}} > t_n$) неможливо визначити (в $100-\alpha$ випадках), чим викликано зміна вихідної величини: впливом кожного члена рівняння регресії або впливом неврахованих факторів і наявністю випадкової похибки вимірювання вихідної величини.

Для розглянутого прикладу оцінка дисперсії відтворюваності як оцінка усереднених рядкових дисперсій згідно з таблицею буде

$$S_e^2 = \sum_{i=1}^N S^2\{y_i\} / N = (43 + 16 + 12 + 4) / 4 = 18.75.$$

Як вже відмічалось, через властивість нормування оцінки коефіцієнтів будуть знайдені з однаковою дисперсією, тобто

$$S^2 \left\{ \hat{a}_n \right\} = S_b^2 / Nm = 18.75 / 4 \cdot 3 = 1.56$$

$$\text{Тоді } S \left\{ \hat{a}_n \right\} = 1.25.$$

Знайдемо обчислене значення коефіцієнта Ст'юдента t_n для встановлених оцінок коефіцієнтів \hat{a}_n :

$$t_0 = |a_0| / \left\{ \hat{a}_n \right\} = 50.5 / 1.25 = 40.4.$$

Аналогічно одержимо

$$t_1 = 22.5 / 1.25 = 18; \quad t_2 = 15.5 / 1.25 = 12.4; \quad t_{12} = 1.5 / 1.25 = 1.2.$$

Із таблиці при рівні статистичної значущості $\alpha=5\%$ і числі ступенів свободи $f = N(m-1) = 4(3-1) = 8$ знайдемо табличне значення коефіцієнта. Воно дорівнює $t_{\alpha=2,3}$. Зіставимо розрахункове значення t_n з табличним $t_{\text{табл.}}$. Нерівність виконується для t_{12} . Таким чином, можна вважати, що коефіцієнт \hat{a}_{12} статистично незначний і його можна виключити з рівняння регресії – в даному випадку вплив парної взаємодії відсутній, але незначний проте перед тим як прийняти гіпотезу $\hat{a}_n = 0$, необхідно переконатися у правильності поставленого експерименту. Може трапитися, що вибір діапазону вимірювання незалежної змінної ($X_{n \max} - X_{n \min}$) малий, а сумарна випадкова перешкода, накладена на вихідну величину об'єкта, значна. Це також може призвести до статистичної незначущості коефіцієнта. Пересвідчившись, що з цієї точки зору експеримент проведений правильно, можна \hat{a}_n коефіцієнт виключити з рівняння регресії. Оскільки повний факторний експеримент має властивості ортогональності, то виключення цього коефіцієнта з рівняння регресії не впливає на знайдені оцінки інших коефіцієнтів.

Таким чином, рівняння регресії досліджуваного об'єкта, який містить статистичні значущі коефіцієнти, буде (в кодованій системі)

$$\hat{y} = 50.5 + 22.5x_1 - 15.5x_2.$$

Для кожного коефіцієнта \hat{a}_n можна знайти довірчий інтеграл, в якому повинен попасти істинний генеральний коефіцієнт з прийнятим рівнем значущості. Для цього використовуємо формулу

$$\hat{a}_n - t_n S \left\{ \hat{a}_n \right\} \leq a_n \leq \hat{a}_n + t_n S \left\{ \hat{a}_n \right\}.$$

Отже, істинні значення коефіцієнтів моделі будуть знаходитися в межах

$$47.6 \langle a_0 \rangle (53.4; 19.6 \langle a_2 \rangle (25.4; -12.6) a_2) - 18.4.$$

Одержане рівняння регресії, треба перевірити на адекватність досліджуваному об'єкту, тобто встановити, наскільки добре воно апроксимує одержані експериментальні дані. Для цього необхідно оцінити, наскільки відрізняються середні значення \bar{y}_i вихідної величини, одержаної в планах факторного простору в результаті проведення дослідів, і значення \hat{y}_i , одержаного з рівняння регресії в тих же точках факторного простору.

Для цього обчислюємо залишкову дисперсію, яку ще називають дисперсією адекватності:

$$S'_{ad} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^m (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2,$$

де m - число паралельних дослідів в i -й точці факторного простору, l -число здайдених в результаті проведених N - дослідів значущих коефіцієнтів.

Якщо число паралельних дослідів різне, тоді оцінку дисперсії адекватності знаходимо із виразу

$$S'_{ad} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^{m_i} (\bar{y}_{iu} - \hat{y}_i)^2.$$

Відмінність S'_{ad}^2 від нуля пояснюється в загальному випадку двома причинами: дійсно неадекватністю рівняння регресії фізичному об'єкту (неправильно вибраний апроксимуючий поліном) і наявністю випадкової похибки сприйняття, що характеризується S_b^2 .

Якщо модель адекватна, то оцінки дисперсії відтворюваності залежать тільки від похибки сприйняття вихідної величини, зумовленої сумарною

перешкодою, і в граничному випадку будуть однакові. Тому адекватність одержаної моделі перевіряємо шляхом порівняння оцінок двох дисперсій $S_{ад}'^2$ і S_B^2 і F-критерію Фішера:

$$F_p = S_{ад}'^2 / S_B^2.$$

Знайдене F_p порівнюємо з табличним значенням F_t , яке встановлюємо при рівні статистичної значущості α і числі ступенів свободи $f_{ад}=N-1$ і $f_B=N(m-1)$.

Якщо $F_p < F_m$, то одержана математична модель з прийнятим рівнем статистичної значущості α адекватна експериментальним даним і її можна використати для подальших досліджень.

Повернемось до прикладу. Визначимо для одержаної моделі оцінку дисперсії адекватності.

Обчислимо значення \hat{y}_i , які відповідають рядкам матриці плану:

$$\hat{y}_1 = 50.5 + 22.5(-1) - 15.5(-1) = 43.5;$$

$$\hat{y}_2 = 50.5 + 22.5(+1) - 15.5(-1) = 88.5;$$

$$\hat{y}_3 = 50.5 + 22.5(-1) - 15.5(+1) = 12.5;$$

$$\hat{y}_4 = 50.5 + 22.5(+1) - 15.5(+1) = 57.5.$$

Оцінка дисперсії:

$$S_{ад}^2 = 3[(43 - 43.5)^2 + (90 - 88.5)^2 + (14 - 12.5)^2 + (56 - 57.5)^2] / 4 - 3 = 27.$$

Одержане значення $S_{ад}^2=27$ розділимо на $S_B^2=18,75$ і одержимо $F=1,44$.

Табличне значення коефіцієнта Фішера на рівні статистичної значущості $\alpha=0,05$ і числі ступенів свободи $f_{ад}=(4-3)=1$ і $f_B=N(m-1)=4(3-1)=8$ буде $F_m=5,32$.

Таким чином, при вибраному рівні статистичної значущості $\alpha=0,05$ одержане в результаті експерименту $\hat{y} = 50.5 + 22.5x_y - 15.5x_2$ адекватне досліджуваному об'єкту. Відмітимо, що дана модель представлена в кодованій системі координат. Щоб одержати її у звичайній системі, треба використати формули переходу.

На практиці часто буває, що лінійне рівняння регресії незадовільно характеризує досліджувану область.

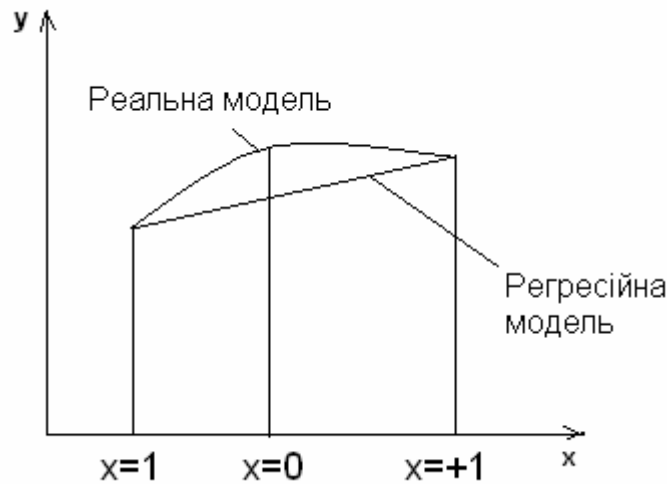


Рис.4.2 Перевірка адекватності лінійної моделі

На рис. 4.2 показаний випадок парної залежності, коли дослідні й розрахункові дані в точках, в яких проводився експеримент (у кодованій системі $X_{11} = -1$ і $X_{21} = 1$) співпадають, проте всередині поля кореляції спостерігаються значні відхилення регресійної і реальних залежностей.

Для підвищення надійності перевірки адекватності моделі часто проводять допоміжну серію паралельних дослідів у базовій точці $x_j = 0, j = \overline{1, n}$. Тоді число точок факторного простору, за яким оцінюється адекватність рівняння регресії, збільшують на одну і воно дорівнює $N+1$, тобто збільшується на одиницю і число ступенів свободи $f_{ад}$, що підвищує статистичну надійність прийнятих рішень. Однак базова точка не враховується в розрахунках коефіцієнтів рівняння регресії. Значення вихідної величини в центрі плану повинно бути порівняне (в межах дисперсії відтворюваності) з вільним членом рівняння регресії, тобто

$$\left| \hat{a}_0 - \bar{y}_0 \right| < \delta,$$

де δ наперед задане значення, що залежить від S_v^2 .

У разі порушення цієї нерівності для математичного опису необхідні рівняння більш високого порядку.

Таблиця 4.6

№ п/п	x_1	x_2	x_3	\tilde{y}_j	x_0	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$
1	-1	-1	-1	2	+1	+1	+1	+1	-1
2	+1	-1	-1	6	+1	-1	-1	+1	+1
3	-1	+1	-1	4	+1	-1	+1	-1	+1
4	+1	+1	-1	8	+1	+1	-1	-1	-1
5	-1	-1	+1	10	+1	+1	-1	-1	+1
6	+1	-1	+1	18	+1	-1	+1	-1	-1
7	-1	+1	+1	8	+1	-1	-1	+1	-1
8	+1	+1	+1	12	+1	+1	+1	+1	+1

Розглянемо ще один приклад побудови математичної моделі за результатами експерименту. Вважаємо, що на об'єкт діють три фактори:

$$\begin{aligned} x_{1\min} &= 4; & x_{1\max} &= 8; \\ x_{2\min} &= 10; & x_{2\max} &= 12; \\ x_{3\min} &= 12; & x_{3\max} &= 28. \end{aligned}$$

які пов'язані з вихідною величиною залежністю

$$Y = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_{12} X_1 X_2 + A_{13} X_1 X_3 + A_{23} X_2 X_3 + A_{123} X_1 X_2 X_3$$

Середнє значення $X_{jcp} = (X_{j\max} + X_{j\min}) / 2$ і інтервал варіювання незалежних змінних $\Delta_j = (X_{j\max} - X_{jcp}) / 2$ будуть

$$\begin{aligned} x_{1cp} &= 6; & \Delta_1 &= 2; \\ x_{2cp} &= 11; & \Delta_2 &= 1; \\ x_{3cp} &= 20; & \Delta_3 &= 8. \end{aligned}$$

Підставимо значення X_{jcp} і A_j у формулу переходу і одержимо рівняння моделі в кодованій системі координат:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{123} x_1 x_2 x_3.$$

Оцінку коефіцієнтів цієї моделі будемо знаходити за експериментальними даними, одержаними в результаті проведення типу 2^n , де $n=3$. Згідно з відомим правилом побудуємо матрицю повного трифакторного

експерименту, яка має властивості ортогональності симетричності і нормування (табл. 4.6).

Вважаємо, що досліди однорідні. Тому в кожній точці факторного простору можна проводити тільки за одним дослідом (серія паралельних дослідів не проводиться). Значення вихідної величини \tilde{y}_i для цього випадку наведені у табл. 4.6.

Для визначення оцінок коефіцієнтів рівняння регресії доповнимо матрицю плану (обведена більш жирними лініями) вектор-стовпцями фіктивної змінної і лінійними взаємодіями факторів.

За результатами експерименту визначимо оцінки коефіцієнтів:

$$\hat{a}_0 = (2 + 6 + 4 + 8 + 10 + 18 + 8 + 12)/8 = 8.5;$$

$$\hat{a}_1 = (-2 + 6 - 4 + 8 - 10 + 18 - 8 + 12)/8 = 2.5;$$

$$\hat{a}_2 = (-2 - 6 + 4 + 8 - 10 - 18 + 8 + 12)/8 = -0.5;$$

$$\hat{a}_3 = (-2 - 6 - 4 - 8 + 10 + 18 + 8 + 12)/8 = 3.5;$$

$$\hat{a}_{12} = (-2 - 6 - 4 + 8 + 10 - 18 - 8 + 12)/8 = -0.5;$$

$$\hat{a}_{13} = (2 - 6 + 4 - 8 - 10 + 18 - 8 + 12)/8 = 0.5;$$

$$\hat{a}_{23} = (2 + 6 - 4 - 8 - 10 - 18 + 8 + 12)/8 = -1.5;$$

$$\hat{a}_{123} = (-2 + 6 + 4 - 8 + 10 - 18 - 8 + 12)/8 = -0.5.$$

Для визначення оцінки дисперсії відтворюваності, а також більш достовірної перевірки адекватності одержаної моделі в центрі плану була поставлена допоміжна серія із $p=3$ дослідів і одержані наступні значення:

$$\tilde{y}_{10} = 8.0 \quad ; \quad \tilde{y}_{20} = 9.0 \quad ; \quad \tilde{y}_{30} = 8.8.$$

Середнє значення вихідної величини в центрі плану ($x=0$)

$$\bar{y}_0 = (8 + 9 + 8.8)/3 = 8.6,$$

а дисперсія в центрі плану, яка приймається за оцінку дисперсії відтворюваності, визначається так:

$$S^2\{y_0\} = S_b^2 = [(8.6 - 8)^2 + (9 - 8.6)^2 + (8.8 - 8.6)^2]/(3 - 1) = 0.28.$$

Оскільки виконується умова нормування, оцінки коефіцієнтів даної моделі будуть знайдені з однаковою дисперсією, тобто

$$S^2 \left\{ \hat{a}_n \right\} = S_b^2 / N \cdot 1 = 0.28 / 8 = 0.035 ,$$

кратність досліду в кожній i -й точці ($i = \overline{1, N}$) дорівнює одиниці, тобто $m=1$.

$$\text{Звідки } S \left\{ \hat{a}_n \right\} \approx 0.2 .$$

Перевіримо статистичну значущість знайдених коефіцієнтів, встановимо розраховані значення коефіцієнта $t_k = \left| \hat{a}_n \right| / S \left\{ \hat{a}_n \right\}$:

$$\begin{array}{llll} t_0=42.05; & t_1=12.05; & t_2=2.05; & t_3=17.5; \\ t_{12}=2.05; & t_{13}=2.5; & t_{23}=7.5; & t_{123}=2.5. \end{array}$$

Табличне значення коефіцієнта Ст'юдента при $\alpha=0,05$ і числі ступенів свободи $(p-1)=(3-1)=2$ (оцінка дисперсії відтворюваності проводилась на основі серії із $p=3$ дослідів в одній точці – центрі плану) $t_{T'} = 4.3$.

Порівнюючи табличне $t_{T'}$ і обчислене t_n значення коефіцієнтів, встановимо, що незначущими (так як $t_n < t_{T'}$) є знайдені оцінки коефіцієнтів \hat{a}_2 , \hat{a}_{12} , \hat{a}_{13} і \hat{a}_{123} .

Рівняння регресії, яке має статистичні коефіцієнти,

$$\hat{y} = 8.5 + 2.5x_1 + 3.5x_3 - 1.5x_2x_3 .$$

Одержану таким чином математичну модель необхідно перевірити на адекватність. Для цього визначимо оцінку дисперсії адекватності. Оскільки кратність дослідів дорівнює одиниці, тобто $m=1$, то

$$S_\alpha^2 = \sum_{i=1}^N \left(\tilde{y}_i - \hat{y}_i \right)^2 / N - l .$$

Попередньо переконавшись, що рівняння регресії “підходить” для опису експериментальних даних, оскільки середнє значення вихідної величини в центрі плану $\bar{y}_0 = 8.6$, а оцінка свободного члена $\hat{a}_0 = 8.5$ і $\left| \hat{a}_0 - \bar{y}_0 \right| = 0.1 (1.5\% ,$

знайдемо значення вихідної величини на основі рівняння регресії в точках плану. Для першої точки

$$\hat{y}_1 = 8.5 + 2.5(-1) + 3.5(-1) - 1.5(+1) = 1.$$

Аналогічно одержимо значення і для інших точок плану, які зведені в табл.3, виходячи з якої знайдемо оцінку дисперсії адекватності при умові, що $N - l = 8 - 4 (l = 4)$, тобто уточнене рівняння регресії має чотири коефіцієнти:

$$S_{a\hat{o}}'^2 = 8 / 4 = 2.$$

Знаючи значення $S_{a\hat{o}}'^2$, встановимо обчислене значення коефіцієнта Фішера:

$$F_p = S_{a\hat{o}}'^2 / S_{\epsilon}^2 = 2 / 0.28 = 7.14.$$

Таблиця 4.7

№ п/п	\tilde{y}_j	\hat{y}_i	$(\tilde{y}_j - \hat{y}_i)$	$(\tilde{y}_j - \hat{y}_i)^2$
1	2	1	1	1
2	6	6	0	0
3	4	4	0	0
4	8	9	1	1
5	10	11	1	1
6	18	16	2	4
7	8	8	0	0
8	12	13	1	1
$\sum_1^N (\tilde{y} - \hat{y})^2 = 8$				

Число ступенів свободи $f_{a\hat{o}} = (N - l) = 4$, $f_{\epsilon} = p - 1 = 2$. Задаючись рівнем статистичної значущості $\alpha = 0,05$, при $f_{a\hat{o}} = 4$ і $f_{\epsilon} = 2$, знайдемо табличне значення $F_T = 19,3$.

Таким чином з достовірністю $(1 - \alpha) = 95\%$ рівняння регресії адекватне експериментальним даним.

Одержане рівняння регресії представлено в кодованій системі координат. Для переходу в звичайну систему координат скористуємося формулою переходу і значеннями x_{jcp} і Δ_j . Тоді

$$\hat{Y} = 8.5 + 2.5 \frac{x_1 - 6}{2} + 3.5 \frac{x_3 - 20}{8} - 1.5 \frac{x_2 - 11}{1} \cdot \frac{x_3 - 20}{8}$$

або

$$\hat{Y} = 8.5 + 1.25x_2 - 7.5 + 0.44x_3 - 8.75 - 0.19x_2x_3 + 3.75x_2 - 2.06x_3 - 41.25.$$

Остаточно одержимо рівняння регресії

$$\hat{Y} = -49.0 + 1.25x_1 + 3.75x_2 - 1.62x_3 - 0.19x_2x_3,$$

що адекватно описує експериментальні дані.

4.7 Дрібний факторний експеримент

План і модель – нерозривно зв'язані поняття. Неможливо приступити до вибору плану без завдання моделі об'єкта. Наприклад, треба встановити, які плани необхідно використовувати, якщо мова іде про лінійну модель і взаємодію, що можна знехтувати.

Кількість дослідів в ПФЕ 2^k при $K \geq 3$ значно перевищує число лінійних коефіцієнтів. Зокрема, при $K=3$ кількість дослідів $N=8$, а число коефіцієнтів дорівнює чотирьом, тобто ПФЕ типу 2^3 дає надмірну інформацію, яка несуттєва при побудові лінійної моделі. Для зменшення кількості дослідів і збереженні властивостей, притаманних ПФЕ 2^k , користуються дрібним факторним експериментом (дрібною реплікою). Такий план являє собою частину плану ПФЕ. Наприклад, для випадку вивчення трьох факторів матриця планування ПФЕ 2^3 має вигляд, показаний в табл. 4.8.

План ПФЕ 2^2 тут обведено рамкою.

При нехтуванні ефектом взаємодії вектор-стовпець $x_1 x_2$ плану ПФЕ 2^2 можна використовувати для введення в цей план нового фактора x_3 , що дозволяє визначити лінійну модель об'єкта у вигляді $Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$

Таблиця 4.8 - Матриця планування трикратного експерименту

№ досліду	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	Y
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	Y_1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	Y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	Y_3
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	Y_4
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_6
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_8

У загальному випадку дрібна репліка відповідає плану ПФЕ типу 2^{k-r} , де показник r , $r = 1, 2, \dots$, характеризує дрібність репліки відносно плану 2^k .

Відмітимо, що ефективність застосування дрібних реплік підвищується із зростанням числа факторів. Так при дослідженні впливу шести факторів на лінійні моделі можна в 6 разів скоротити число дослідів, використавши репліку більшої дрібності (при $r = 3$ дрібність репліки складає 1/8 від плану ПФЕ 2^6 і замість 64 дослідів проводяться 8).

4.8 Складання планів другого порядку

У тих випадках, коли поверхня відклику суттєво нелінійна в рівнянні моделі крім лінійних членів і членів, що враховують взаємодію, необхідно, як мінімум включати й квадратичні члени, які дозволяють відобразити не лінійність яких-небудь перерізів поверхні відклику. Як і раніше, завдання планування експерименту полягає у визначенні: за вимірними значеннями відгуку Y_i коефіцієнтів апроксимуючого полінома, що включає в себе квадратичні члени. Зокрема, при двофакторному експерименті така модель має вигляд

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2. \quad (4.5)$$

Спроба оцінити коефіцієнти полінома за планом ПФЕ 2^2 не дає позитивних результатів. Дійсно, при побудові вектор-стовпців для $x_4 = x_1^2$ і $x_5 = x_2^2$ одержимо стовпчики, які співпадають один з одним і з стовпчиком x . Оскільки вказані стовпці не відмінні, неможливо визначити, за рахунок чого формується значення b_0 ; воно залежить як власне від b_0 , так і від внесків квадратичних членів, тобто має місце змішана оцінка. Це твердження справедливе і при більшій кількості факторів. Причина полягає в тому, що для характеристики кривизни поверхні відгуку в перерізі $Y = f(x_i)$ при $x = \text{const}$, $i \neq j$ необхідно не менше трьох точок, а дворівневі плани дозволяють встановити тільки дві точки. Таким чином, з планів ПФЕ типу 2^2 неможливо одержати інформацію про коефіцієнти b_{ii} при квадратичних членах і членах більш високого порядку. Це завдання може бути вирішена при переході до плану ПФЕ з більшим числом рівнів варіювання факторів, наприклад до плану ПФЕ типу 3^k . Проте тоді число дослідів стає досить великим навіть при порівняно малому числі факторів (табл. 4.9)

Більш простим шляхом рішення є побудова плану ПФЕ 2^k (або його дрібної репліки) до плану більш високого порядку. В цьому разі план ПФЕ 2^n приймають за ядро або центр плану другого порядку, а потім до нього додають симетрично розташовані допоміжні точки факторного простору, які називаються зірковими. Іншими словами, крім значень факторів на рівнях ± 1 на кожній координатній осі факторного простору вибирають дві зіркові точки $x_i = \pm \alpha$, $x_j = 0$, $j = i$, а також додають точку початку координат $x_i = 0$, $i = 1, k$. У кожній площині, що проходить через центр і утримує вісь Y і координатну вісь i -го фактора, мають місце три значення фактора $x_i (-\alpha; 0; +\alpha)$ і три відповідних значення Y . Загальне число дослідів у плані, побудованому таким чином при $k > 1$, складає

$$N = 2^k + 2k + 1.$$

Відмітимо, що число дослідів, визначене цим співвідношенням, суттєво менше ніж, наприклад, у плані ПФЕ 3^k при $k > 2$.

Таблиця 4.9

Кількість факторів k	Кількість коефіцієнтів квадратичного полінома $S = 1 + 2k + \frac{kl}{2l(k-2)l}$	Число дослідів при плані		
		ПФЕ 2^k , $N = 2^k$	ПФЕ 3^k , $N = 3^k$	Другого порядку, $N = 2^k + 2^k + 1$
1	3	2	3	3
2	6	4	9	9
3	10	8	27	15
4	15	16	81	25
5	21	32	244	43
6	28	64	732	77
7	36	128	2196	143

4.9 Ортогональні центрально-композиційні плани

Обробка даних експерименту пов'язана з вирішенням досить громіздкої системи нормальних рівнянь. Щоб запобігти цьому добудову ПФЕ 2^k (вибір положення зіркових точок) треба робити таким чином, щоб виконувались принципи ортогональності і симетрії. Умови нормування можуть не дотримуватися. План другого порядку, задовольняючи і цим умовам, прийнято називати ортогональним центрально-композиційним планом (ОЦКП).

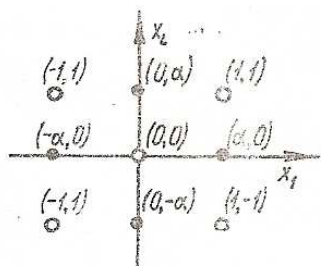


Рис. 4.3

Як приклад розглянемо розташування дослідних точок у двофакторному просторі ОЦКП. На рис. 4.3 кружками відмічені точки ядра плану (план ПФЕ 2²), а точками - зіркові точки.

Величина α , яка називається зірковим плечем, залежить від числа варійованих факторів. Щоб матриця планування була ортогональною, алгебраїчна сума елементів вектор-стовпців повинна дорівнювати нулю не тільки для кожного фактора і їх добутку, але й для вектор-стовпців відповідних квадратів факторів. Очевидно, що виконати останню умову можливо лише в тому разі, якщо квадрати факторів піддати деякому перетворенню, оскільки в протилежному разі сума квадратів будь-яких чисел не дорівнює нулю. Найпростішим перетворенням квадратів факторів є наступні:

$$x_{iu}^* = x_{iu}^2 - d_i, \quad (4.6)$$

де x_{iu}^* - перетворений фактор; d_i - постійна величина, що залежить від числа факторів k . Запишемо умови симетрії для квадратів факторів з урахуванням співвідношення (4.6):

$$\sum_{u=1}^N x_{iu}^* = \sum_{u=1}^N (x_{iu}^2 - d_i) = \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 - Nd_i = 0. \quad (4.7)$$

Звідси
$$d_i = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{iu}^2.$$

При $\sum_{iu} x_{iu}^2 = const$ значення d_i однакове для всіх факторів.

Для перетворених факторів повинна також виконуватись умова ортогональності:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu}^* x_{ju}^* = 0, i \neq j. \quad (4.8)$$

Вона задовольняється при значеннях зіркового плеча α , наведених у табл. 4.10. У цій таблиці є ще інші дані, необхідні для визначення коефіцієнтів квадратичних поліномів.

Таблиця 4.10 - Дані для розрахунку коефіцієнтів полінома

Число факторів, k	Ядро плану ПФЕ	Загальне число дослідів, N	Зіркове плече, α	Значення d
2	2^2	9	1,000	0,667
3	2^3	15	1,215	0,730
4	2^4	25	1,414	0,800
5	2^{5-1}	27	1,547	0,770
5	2^5	43	1,596	0,863

Маючи дані таблиці, можна побудувати ОЦКП другого порядку. Приклад такого плану для двох факторів ($\alpha = 1$), ($d = 2/3$) наведений в табл. 4.11.

Таблиця 4.11 - ОЦКП другого порядку для двофакторного експерименту

Параметри	u	x_0	x_1	x_2	$x_3 = x_1 x_2$	$x_4^* = x_1^2 - \frac{2}{3}$	$x_5^* = x_2^2 - \frac{2}{3}$	$x_4^* x_5^*$
План ПФЕ 2^2	1	+1	-1	-1	+1	1/3	1/3	1/9
	2	+1	+1	-1	-1	1/3	1/3	1/9
	3	+1	-1	+1	-1	1/3	1/3	1/9
	4	+1	+1	+1	+1	1/3	1/3	1/9
Зіркові точки	5	+1	-1	0	0	1/3	-2/3	-2/9
	6	+1	+1	0	0	1/3	-2/3	-2/9
	7	+1	0	-1	0	-2/3	1/3	-2/9
	8	+1	0	+1	0	-2/3	1/3	-2/9
Нульова точка	9	+1	0	0	0	-2/3	-2/3	4/9

Аналіз даних таблиці свідчить, що умови (4.7) і (4.8) виконуються. Це дозволяє визначити коефіцієнти апроксимуючого полінома. Поліном (4.5) з урахуванням перетворення (4.6) записується так:

$$Y = b_0^* + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} (x_1^2 - d) + b_{22} (x_2^2 - d).$$

Після розкриття дужок поліном можна привести до звичайного вигляду:

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2, \quad (4.9)$$

де $b_0 = b_0^* - d(b_{11} + b_{22})$.

Проїлюструємо викладене на простому прикладі.

Приклад. Нехай в результаті дослідів за планом ПФЕ 2^2 (див. табл. 4.11 $u = 1, 4$) одержані значення функції відклику Y , наведені нижче:

Таблиця 4.12 - Значення функції відгуку

Відгук	№ досліду u								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
У досліді Y_u	6,00	3,00	4,00	7,00	5,00	5,00	1,00	3,00	2,00
Розрахунок Y_p	5,83	2,83	4,17	7,17	5,00	5,00	1,33	2,67	2,00

Коефіцієнти b_i апроксимуючого полінома, які враховують лінійні ефекти і ефекти взаємодії, розраховують за формулою

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N y_u x_{iu}, \quad b_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N y_u x_{iu} x_{ju}.$$

У даному випадку $i = 0, 3$, $N = 4$. Після підстановки в цей вираз значень Y_u і X_{iu} остаточно одержимо: $b_0 = 5$; $b_1 = 0$; $b_2 = 0,5$; $b_{12} = 1,5$.

Апроксимуючий поліном запишемо у вигляді

$$Y = 5 + 0,5x_2 + 1,5x_1 x_2.$$

Оскільки в даному разі кількість дослідів N і кількість коефіцієнтів полінома співпадають ($N = S = 4$), апроксимуюча поверхня проходить через всі чотири дослідні точки. Для перевірки адекватності залежності по всій поверхні експериментування поставимо контрольний дослід у нульовій точці $x = x = 0$, $u = 9$. Експериментальним значенням функції відгуку $Y_{e9} = 2$, що суттєво відрізняється від розрахованого її значення $Y_{p9} = 5$ ($\Delta Y = 3$). Для одержання кращої апроксимації функції відгуку побудуємо план до ортогонального плану другого порядку, тобто до чотирьох дослідів, плану ПФЕ 2^2 і дослід у нульовій точці додамо чотири дослідів ($u = 5, 8$) в зіркових точках.

Коефіцієнти квадратичного полінома (4.9) знаходять за формулою

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^9 Y_u x_{iu}}{\sum_{u=1}^9 x_{iu}^2} \quad i = 0, 5.$$

Остаточно маємо $b_0^* = \frac{36}{9} = 4$; $b_1 = \frac{0}{6} = 0$; $b_2 = \frac{4}{6} = 0,67$; $b_{12} = \frac{6}{4} = 1,5$;

$$b_{11} = \frac{6}{2} = 3; \quad b_{22} = \frac{0}{2} = 0,$$

$$b_0 = b_0^* - d(b_{11} + b_{22}) = 4 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 2.$$

Підставимо знайдені значення коефіцієнтів в (4.9) і запишемо:

$$Y = 2 + 0,67x_2 + 1,5x_1x_2 + 3x_1^2. \quad (4.10)$$

Розраховані значення функції відклику Y , обчислені відповідно до (4.10) наведені в табл. 4.12. Як видно з цієї таблиці, точність апроксимації суттєво підвищується:

$$\Delta Y_{\max} = 0,33.$$

5. ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ ПРИ ВІДШУКАННІ ЕКСТРЕМАЛЬНОЇ ОБЛАСТІ

Одним з основних завдань планування експерименту є пошук екстремуму функції відгуку. Цей пошук відбувається шляхом дослідження поверхні відгуку. Ці дослідження виконують за допомогою вимірювання поверхні відгуку в різних точках факторного простору. Виникає запитання: якою повинна бути стратегія планування експерименту, щоб число дослідів (вимірювань), необхідних для знаходження екстремуму або близьких до нього значень, було якомога менше.

Кінцевою метою проведення експериментальних досліджень є досягнення екстремальної області й одержання екстремального значення функції відгуку.

Вирішення цього завдання виконується у два етапи:

- перший етап – пошуковий рух до області екстремуму;

- другий етап – уточнення екстремальної точки або за допомогою допоміжних пошукових дослідів, або за допомогою математичної моделі області екстремуму, при цьому ця модель отримується за допомогою спеціально організованих дослідів.

Усі пошукові методи визначення екстремуму при активному експерименті діляться на класичні й факторні.

5.1 Класичні методи визначення екстремуму

За класичними методами пошукові досліді для просування до області екстремуму виконують шляхом почергового варіювання незалежних змінних. При цьому вважається, що всі інші фактори залишаються на цей час незмінними (фіксованими).

Зобразимо функцію відгуку досліджуваного об'єкта топографічним способом за допомогою замкнутих ліній постійного рівня (рис. 5.1), використовуючи метод Гаусса-Зейделя.

Вибираємо (або задаємо) базову точку $K_0 (X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0n})$, де n – число керованих вхідних величин. Потім вибираємо ступінь варіювання незалежними змінними. Він повинен бути не дуже малим, щоб рух до екстремуму не був повільним, а вибір кроку дуже великим що може призвести до грубих похибок у знаходженні екстремуму.

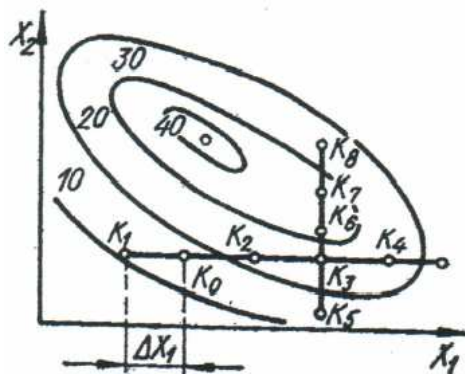


Рис. 5.1 - До використання методу Гаусса-Зейделя

Відповідно до методу Гаусса-Зейделя, на першому етапі стабілізуємо усі незалежні змінні, крім першої, на рівні X_{0j} ($j = \overline{2, n}$), а змінну X_1 варіюємо за обраним кроком.

Таким чином, в околиці базової точки K_0 проводимо два досліди при значеннях $X_{11}=X_{01}-\Delta X_1$ і $X_{21}=X_{01}+\Delta X_1$ і знаходимо відповідно значення функції відгуку Y_1 і Y_2 в точках K_1 і K_2 (ΔX_1 – крок варіювання незалежної змінної X_1). Порівнюючи $Y(X_{11})$ і $Y(X_{21})$, встановлюємо напрямок зміни X_1 , який приводить до збільшення функції відгуку $Y(X)$. Для випадку, представленого на рис. 5.1, значення функції відгуку в точці K_2 більше ніж у точці K_1 . У такій ситуації рухатися необхідно в напрямку $K_0 - K_2$ за обраним кроком ΔX_1 . Процедура просування до локального (часткового) екстремуму за фактором X_1 закінчується, коли для будь-яких трьох послідовних точок $X_{(m-1),1}$, $X_{m,1}$, $X_{(m+1),1}$ виконується $Y_{m-1} < Y_m > Y_{m+1}$. Точка K_m відповідає локальному екстремуму і вибирається базовою, значення X_m фіксується і перший етап завершується. Для випадку, представленого на рис. 5.1 такою точкою є точка K_3 .

На другому етапі точка першого часткового екстремуму приймається за нову базову точку, і варіюється друга незалежна змінна X_2 зі своїм ступенем варіювання ΔX_2 , а інші фактори стабілізуються. Знову виконуємо пробні досліди для виявлення напрямку руху до екстремуму за фактором X_2 , а потім проводимо рухи для досягнення часткового екстремуму.

Для прикладу на рис. 5.1 рух до екстремуму після проведення пробних дослідів необхідно виконувати в напрямку $K_3 - K_6$ для досягнення точки K_7 , яка приймається за нову базову точку. Якщо число незалежних змінних n , то на третьому етапі варіюється X_3 при стабілізованих інших X_j і т.д. до знаходження часткового екстремуму за n -м фактором. Якщо головний екстремум не досягнуто, то проводимо новий цикл дослідів з n етапів і т.д. до досягнення головного екстремуму.

Очевидною перевагою методу Гаусса-Зейделя є його наглядність і простота. Проте шлях до головного (глобального) екстремуму звичайно буває довгим, особливо при великому числі n змінних. Крім того, при цьому важко

стабілізувати на довгий час всі керовані фактори, крім одного, що викликає допоміжні похибки в знаходженні часткових екстремумів.

Застосування градієнтних методів дозволяє швидше відшукати область екстремуму. Ці методи засновані на попередньому визначенні градієнта функції відгуку $Y(X) = Y(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Градієнтом неперервної функції $Y(X)$ називається вектор з координатами

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial X_i} \right|_{X_0}, i = \overline{1, n},$$

де $X_0 = (X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0n})$ – точка, в якій береться градієнт:

$$\text{grad}Y(X) = \left(\left. \frac{\partial Y}{\partial X_1} \right|_{X_0}, \left. \frac{\partial Y}{\partial X_2} \right|_{X_0}, \dots, \left. \frac{\partial Y}{\partial X_n} \right|_{X_0} \right). \quad (5.1)$$

Якщо функцію відгуку в околиці точки X_0 розкласти в ряд Тейлора й обмежитись лише лінійними членами, то область, розташовану біля X_0 , можна апроксимувати залежністю

$$\begin{aligned} Y(X) = & Y(X_0) + \left. \frac{\partial Y}{\partial X_1} \right|_{X_0} (X_{11} - X_{01}) + \left. \frac{\partial Y}{\partial X_2} \right|_{X_0} (X_{12} - X_{02}) + \\ & + \dots + \left. \frac{\partial Y}{\partial X_n} \right|_{X_0} (X_{1n} - X_{0n}) = A_0 + A_1(X_{11} - X_{01}) + A_2(X_{12} - X_{02}) + \\ & + \dots + A_n(X_{1n} - X_{0n}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Порівнюючи (5.1) і (5.2), неважко зробити висновок, що координати вектор-градієнта по відношенню до точок A_0 , співпадають з коефіцієнтами A_1, A_2, \dots, A_n лінійної поліноміальної моделі.

Методи градієнта відрізняються правилом вибору кроку просування до екстремуму. Суть стратегії всіх градієнтних методів полягає в тому, що на кожному етапі руху до екстремуму біля обраної (або одержаної) базової точки проводять пробні дослідження, за результатами яких оцінюють напрямок градієнта у факторному просторі, після чого виконують за обраним робочим кроком λ просування в нову базову точку, яка буде ближче до екстремуму ніж початкова

точка. Таким чином, градієнтним називають метод, відповідно до якого точка X_{m+1} вибирається з умови

$$X_{m+1} = X_m + \lambda \text{grad} Y(X_m). \quad (5.3)$$

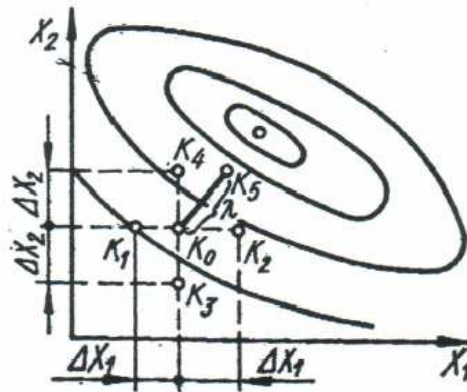


Рис. 5.2 - До використання градієнтного методу

На рис. 5.2 показано порядок проведення дослідів за методом градієнта. Як і за методом Гаусса-Зейделя, в околиці базової точки ставимо досліди для відшукування напрямку просування (в даному разі в напрямку градієнта).

Вибираємо ступені варіювання ΔX_1 , ΔX_2 незалежними змінними. Слід враховувати, що при малих ступенях варіювання ΔX_j ($j = \overline{1, n}$) може бути велика похибка оцінки складових градієнта, а при дуже великих – можна не враховувати особливості рельєфу в околиці базової точки поверхні відгуку.

Пробні досліди в точках K_1 , K_2 , K_3 , K_4 дають значення функції відгуку в цих точках. Складові градієнта за змінними X_1 і X_2 обчислюються на основі результатів пробних дослідів як відношення приросту функції відгуку Y у відповідних точках до приросту аргументу в тих же точках:

$$\begin{aligned} \text{grad} Y / X_1(K_0) &\approx \frac{\Delta Y}{2\Delta X_1} = \frac{Y(K_2) - Y(K_1)}{X_1(K_2) - X_1(K_1)} = \hat{A}_1; \\ \text{grad} Y / X_2(K_0) &\approx \frac{\Delta Y}{2\Delta X_2} = \frac{Y(K_4) - Y(K_3)}{X_2(K_4) - X_2(K_3)} = \hat{A}_2. \end{aligned}$$

Згідно з (5.2) було встановлено, що складові градієнта є оцінками коефіцієнтів A_j в даному випадку рівняння площини

$$Y = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2,$$

яка апроксимує поверхню відгуку в районі базової точки K_0 .

Напрямок градієнта K_0K_5 при обраному кроку λ будуємо так, щоб проекція K_0K_5 на вісь X_1 була пропорційна \hat{A}_1 , а на вісь X_2 – пропорційна \hat{A}_2 . Для цього помножимо крок просування до екстремуму λ на відповідне значення коефіцієнта A_j і одержимо добутки $\lambda\hat{A}_1$ і $\lambda\hat{A}_2$, які відповідають другій складовій у правій частині виразу (5.3).

Одержані значення відкладаємо у масштабі (перераховуємо) від базової точки K_0 уздовж осей X_1, X_2 з урахуванням знака \hat{A}_1 і \hat{A}_2 . Якщо відшукується максимум функції відгуку, то при $\hat{A}_j > 0$ цей добуток відкладається в позитивному напрямку осі X_j , а при $\hat{A}_j < 0$ – у від'ємному.

Таким чином, одержують координати нової базової точки K_5 , в околиці якої вже описаним способом ставиться нова серія пробних дослідів, за результатами яких оцінюється новий напрямок градієнта.

Кроки просування до екстремуму й пробні досліді продовжують до тих пір, поки всі значення \hat{A}_j не стануть нехтуючи малими. Це й буде ознакою попадання чергової базової точки в область екстремуму.

Модифікації класичного градієнтного методу відрізняються правилом вибору кроку λ просування до екстремальної області. Так, за методом Кіфера-Вольфовіца значення пробних приростів ΔX_j і параметр кроку λ зменшуються в міру наближення до екстремальної області (залежно від номера кроку).

Градієнтному методу в порівнянні з методом Гаусса-Зейделя, властива більша швидкість просування до екстремуму. Проте він більш «чутливий» до випадкових вад – похибка у визначенні проекцій градієнта дуже впливає на правильність вибору напрямку кроку. Градієнтний метод при здійсненні пробних дослідів припускає також фіксацію регульованих змінних при варіюванні однієї з них.

5.2 Факторні методи визначення екстремуму

До факторних методів пошуку екстремальної області відноситься метод крутого сходження (метод Бокса-Уілсона). Серед методів, що розглянуті теорією планування експерименту, метод крутого сходження (будемо розглядати знаходження максимуму функції відгуку) є з'єднуючим між початковим і кінцевим етапами дослідження. Головна ідея методу полягає в тому, що на початковому етапі на основі ПФЕ або ДФЕ одержують самі прості лінійні моделі в якості наближеного опису деякої частини функції відгуку, далекої від екстремуму.

Коефіцієнти моделі, одержаної в результаті ПФЕ й ДФЕ, пропорційні проекціям вектор-градієнта й дозволяють оцінити саме напрямок градієнта, тобто напрямок самого крутого схилу поверхні відгуку. Потім уздовж цього напрямку відбувається поступовий кроковий рух до області екстремуму (звідси й сама назва методу). Метод крутого сходження (МКС) поєднує кращі властивості класичних методів – градієнтного й Гаусса-Зейделя. Схожість із градієнтним методом полягає в тому, що при реалізації ІКС відбувається також просування до області екстремуму в напрямку градієнта, знайденого на основі пробних дослідів в околиці базової точки. Але на цьому схожість і закінчується. За класичним градієнтним методом проводять по два пробних досліді по обидві сторони від базової точки (рис. 5.2) шляхом почергового варіювання кожної із вхідних величин при стабілізації інших $(n-1)$ факторів, а за МКС пробні досліді проводять відповідно до матриці плану ПФЕ або ДФЕ. За факторним експериментом в оцінці кожного коефіцієнту моделі, а значить, кожної складової градієнта беруть участь усі N точок (дослідів). Тому ці оцінки є більш точними, ніж при класичному градієнтному методі, де кожна складова градієнта обчислюється тільки за двома точками. Знайдений таким чином за МКС напрямок градієнта більш вадозахищений і достовірний. У зв'язку з цим в знайденому напрямку градієнта можна виконати декілька, а не один, пробних кроків до досягнення часткового екстремуму. В цьому полягає схожість МКС з методом Гаусса-Зейделя. Проте за класичним методом вважається фіксація $(n-$

1) незалежної змінної при просуванні до екстремуму за варійованою змінною. Просування виконується уздовж осі - фактора, що сповільнює просування до області екстремуму. Таким чином, МКС дозволяє значно швидше й надійніше в порівнянні з класичними методами досягти екстремальної області. Крім того, МКС дає змогу одержати інформацію про ступінь крутизни поверхні в районі базової точки – ця інформація закладена в коефіцієнтах взаємодії.

Нехай задана базова точка K_0 (рис. 5.3). Прийmemo її за центр плану, поставимо її в околиці ПФЕ (або ДФЕ). Важливою особливістю МКС є проведення статистичної оцінки результатів ПФЕ, що значно підвищує надійність інтерпретації цих результатів.

Припустимо, що за результатами дослідів в області базової точки одержане лінійне рівняння регресії (в кодованій системі координат)

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^n \hat{a}_j x_j,$$

яке має статистично значущі коефіцієнти. Вище було показано, що знайдені оцінки коефіцієнтів $\hat{a}_j (j = \overline{1, n})$ пропорційні проекціям вектор-градієнта на осі - фактори.

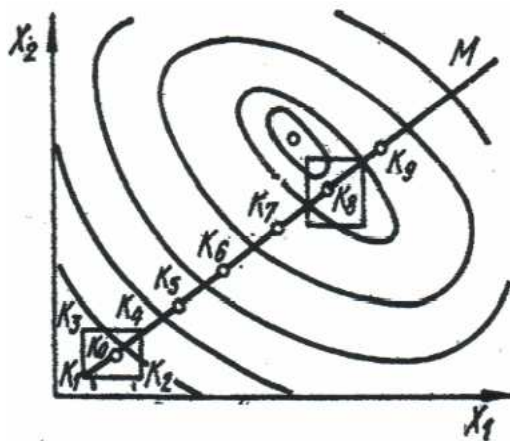


Рис. 5.3 - До використання методу крутого сходження (спуску)

Таким чином, за оцінками лінійних коефіцієнтів \hat{a}_j можна оцінити й напрямок вектор-градієнта, за яким за обраним кроком можна здійснювати просування до часткового екстремуму. Про досягнення часткового екстремуму,

як за методом Гаусса-Зейделя, можна судити за нерівністю $Y_{m-1} < Y_m > Y_{m+1}$. Якщо ця нерівність виконується, точка K_i є точкою часткового екстремуму, її приймають за базову і в околиці реалізують ПФЕ або ДФЕ. Для випадку, наведеного на рис. 5.3, при просуванні в напрямку градієнта (промінь K_0M) такою точкою буде точка K_8 .

У реальних умовах на досліджуваному об'єкті розглядають вхідні змінні в реальному масштабі, варіювання незалежних змінних у звичайних координатах. Повний або дрібний факторний експерименти дають значення функції відгуку в кодованій системі координат. Тому при оцінці складових градієнта треба враховувати значення ступенів варіювання за кожним фактором, а також те, що значення складових градієнта залежить і від масштабу вимірювання (представлення) факторів. Тому протягом всього експерименту незалежні змінні необхідно вимірювати (задавати) в одних і тих же одиницях, зберігати постійний масштаб.

Для обчислення координати точки K_i в напрямку градієнта при пошуку часткового екстремуму необхідно визначити взаємозв'язок між кроком варіювання j -ї незалежної змінної у звичайній і кодованій системі координат. При цьому на основі рівняння регресії, одержаного за результатами ПФЕ або ДФЕ в околиці базової точки, встановлюють найбільш суттєвий фактор, наприклад k -й оцінка коефіцієнта за цим фактором за абсолютною величиною максимальна в порівнянні з іншими оцінками коефіцієнтів. Із фізичних міркувань, для даного фактора вибирають крок варіювання у природному масштабі λ_k виходячи з відомого співвідношення між значеннями фактора в кодованій x_k і природній X_k системах координат:

$$x_k = \frac{X_k - X_{ксер}}{\Delta_k}, \quad (5.4)$$

де $\Delta_k = (X_{k \max} - X_{k \min})/2$, можна встановити взаємозв'язок між λ_k і нормованим кроком λ варіювання незалежної змінної в кодованій системі координат.

Оскільки точка зі значенням $X_{ксер}$ для пробного ПФЕ і ДФЕ лежить в центрі плану (див. рис. 5.3 точка K_0) і з неї починається просування до

екстремуму в напрямку градієнта, то координата по X_k першої точки в напрямку екстремуму (для розглянутого прикладу точки K_5) визначається як різниця

$$X_k^{(5)} - X_{ксер} = \lambda_k. \quad (5.5)$$

На основі співвідношення (5.4) в кодованій системі координат одержимо для точки K_5

$$X_k^{(5)} = \lambda_k / \Delta_k \quad (5.6)$$

Проте для кодованого значення k -го фактора для точки K_5 можна записати

$$X_k^{(5)} = X_k^{(0)} + |\hat{a}_k| \lambda.$$

Як вже відмічалось, точка K_0 лежить в центрі плану, тому $X_k^{(0)} = 0$ і

$$X_k^{(5)} = |\hat{a}_k| \lambda. \quad (5.7)$$

Співставивши вирази (5.6) і (5.7) одержимо взаємозв'язок між кроком варіювання k -го фактора λ_k в натуральних одиницях з нормованим кроком варіювання λ в кодованих одиницях:

$$\lambda = \lambda_k / |\hat{a}_k| \Delta_k. \quad (5.8)$$

Оскільки спочатку був вибраний крок варіювання найбільш суттєвої змінної λ_k , то для того, щоб просуватися в напрямку градієнта, знайденого на основі факторного експерименту, треба, виходячи з виразу (5.8) для нормованого кроку, знайти значення у природних одиницях кроків варіювання іншими факторами. Воно буде

$$\lambda_j = \lambda \hat{a}_j \Delta_j; (j = \overline{1, n-1}).$$

У цьому випадку одержимо координати точки K_5 (першої точки), що лежить в напрямку градієнта.

Використовуючи співвідношення

$$x_j^{(i)} = X_j^{(0)} + l \lambda_j, \quad x_j^{(i)} = l |\hat{a}_j| \lambda, \quad (5.9)$$

одержані з виразів (5.5), (5.7) з урахуванням $X_{j\text{сер}} = X_j^{(0)}$ і $x_j^{(0)} = 0$, можна знаходити координати точок, що лежать в напрямку градієнта, де l -крок просування в напрямку градієнта.

Приклад. За МКС визначити екстремальну область для функції відгуку. На вхід об'єкта діють два фактори X_1 і X_2 , для яких задано (в природних одиницях):

$$\begin{aligned} X_{1\max} &= 2,0 & X_{1\min} &= 1,0; \\ X_{2\max} &= 8,0 & X_{2\min} &= 6,0 \end{aligned}$$

Визначимо координати базової точки і інтервали варіювання факторів:

$$\begin{aligned} X_{j\text{сер}} &= X_j^{(0)} = (X_{j\max} + X_{j\min}) / 2; & \Delta_j &= (X_{j\max} - X_{j\min}) / 2, \\ X_j^{(0)} &= 1,5; \Delta_1 = 0,5; X_2^{(0)} = 7,0; \Delta_2 = 1,0. \end{aligned}$$

Таблиця 5.1

N	X_1	X_2	\hat{y}_i		N	X_1	X_2	\hat{y}_i
1	-1	-1	95,0		3	-1	+1	85,0
2	+1	-1	90,0		4	+1	+1	82,0

В околиці базової точки $X_{j\text{сер}} = X_j^{(0)}$ згідно з матрицею планування ПФЕ провели експеримент і одержали значення вихідної величини (функція відгуку) у відповідно до табл. 5.1.

На основі формули $\hat{a}_j = \sum_{i=1}^4 x_{ij} \hat{y}_i / 4$ знайдемо значення коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= (95,0 + 90,0 + 85,0 + 82,0) / 4 = 88,0; \\ \hat{a}_1 &= (-95,0 + 90,0 - 85,0 + 82,0) / 4 = -2,0; \\ \hat{a}_2 &= (-95,0 - 90,0 + 85,0 + 82,0) / 4 = -4,5. \end{aligned}$$

Таким чином, рівняння регресії, одержане в околиці базової точки $X_j^{(0)}$, має вигляд

$$\hat{y} = 88,0 - 2,5x_1 - 4,5x_2.$$

Найбільш суттєво впливає на зміну функції відгуку фактор X_2 , бо коефіцієнт при ньому за модулем найбільший.

Виберемо крок варіювання фактором X_2 , рівний $\lambda_2 = -0,5$ (крок взято зі знаком «мінус», оскільки відшукується максимум, а збільшення значення X_2 у вихідному рівнянні регресії приводить до зменшення оцінки вихідної величини).

Потім визначаємо нормований крок варіювання факторів в кодованій системі координат:

$$\lambda = -0,5 / 4,5 \cdot 1 \approx -0,11,$$

округлюємо до першої значущої цифри після коми $\lambda = -0,1$. Знаючи λ можна визначити крок варіювання фактором X_1 у природних одиницях, що дозволить знайти координати першої точки в напрямку градієнта (аналогічно точці K_5 на рис. 5.3).

$$\lambda_1 = -0,1 \cdot 2,0 \cdot 0,5 = -0,1.$$

Тоді координати точки K_5 за умовою, що $l=1$ (перший крок просування до екстремуму) визначаються згідно з (5.9):

$$X_1^{(5)} = 1,5 - 0,1 = 1,4;$$

$$X_2^{(5)} = 7,0 - 0,5 = 6,5.$$

Встановивши значення $X_1=1,4$ і $X_2=6,5$ в результаті дослідів одержимо значення функції відгуку $\underline{Y}(K_6)$.

Значення вихідної величини (вірніше, його оцінку) можна одержати на основі рівняння регресії, використовуючи вираз (5.9) для знаходження кодованих значень факторів при $l=1$:

$$X_1^{(5)} = \lambda |\hat{a}_1| = -0,1 \cdot 2,0 = -0,2;$$

$$X_2^{(5)} = \lambda |\hat{a}_2| = -0,1 \cdot 4,5 = -0,45.$$

Тоді

$$\hat{y}^{(5)} = 88,0 - 2,0(-0,2) - 4,5(-0,45) = 90,4.$$

У кожній робочій точці необов'язково проводити реальні дослідів. Щоб зменшити обсяг досліджень, а значить, збільшити їх ефективність, частину натурних дослідів на об'єкті замінюють на так звані «у думці». «У думці»

досліди полягають в одержанні значень вихідної величини на основі лінійного рівняння регресії при підстановці в нього координат робочої точки, визначених на основі виразу (5.9), як це було проведено вище.

Реальні перевірочні досліди проводять через два-три дослід «у думці». На рис. 5.4 зображений переріз поверхні відгуку вертикальною площиною, слід якої проходить через промінь K_0M .

«Ідеальна» крива 1 являє собою дійсний переріз поверхні відгуку, а пряма 2 – значення вихідної величини, одержані (передбачені) на основі лінійного рівняння регресії.

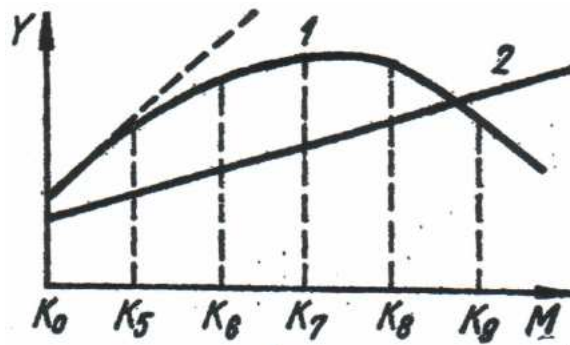


Рис. 5.4 - Розріз поверхні відгуку в напрямку крутого сходження

Перший цикл крутого сходження припиняється після проходження часткового екстремуму (точка K_8), про що вирішують за реальними дослідями. Тому в міру наближення до часткового екстремуму необхідно частіше проводити перевірочні досліди, а після проходження часткового екстремуму в ряді випадків поставити допоміжний перевірочний дослід у проміжках між тими двома робочими точками, після яких почалося зменшення вихідної величини і в яких досягнуті приблизно однакові й найбільш із всіх попередніх значень Y . Крім того, як видно з рис. 5.4, про проходження області часткового екстремуму свідчить зміна знаку різниці між обчисленими і дослідними даними (дослідами «у думці» й натуральними).

Другий цикл починається з досягнутої точки часткового екстремуму, прийнятої за нову базову точку, в околицях якої ставиться ПФЕ або ДФЕ. У

міру наближення до екстремальної області крок варіювання необхідно зменшити. Одержана нова лінійна модель дає новий напрямок градієнта вздовж якого проводяться досліді «у думці» і перевірочні до досягнення в даному напрямку часткового екстремуму.

Свідченням досягнення глобального екстремуму є неадекватність лінійної моделі, одержаної на основі ПФЕ або ДФЕ, коли коефіцієнти при парних взаємодіях різко зростають.

Розглянемо приклад застосування методу крутого сходження при визначенні екстремальної (максимальної) області.

Функція відгуку \underline{Y} залежить від семи факторів, граничне значення яких вибиралось на базі накопиченого раніше дослідів. Вихідні дані, матриця планування, результати дослідів для пробних точок, координати кроків варіювання при просуванні до екстремуму і значення функції відгуку в цих точках зведені в табл. 5.2.

Для визначення напрямку градієнта в околиці базової точки з рівнем $X_j^{(0)}$ достатньо в її околиці побудувати лінійну регресійну модель, що апроксимує поверхню відгуку:

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^7 \hat{a}_j \hat{x}_j,$$

коефіцієнти якої пропорційні проекціям градієнта. Для цієї мети достатньо провести $N \geq 8$ дослідів. Таким чином, в околиці базової точки достатньо провести ДФЕ виду 2^{7-4} , в якому фактори x_1, x_2, x_3 вважаються основними і для яких матриця плану базується за відомим правилом, як при ПФЕ.

Рівні варіювання допоміжних факторів встановлюють на основі чотирьох генеруючих співвідношень, яким відповідають визначаючі контрасти.

Нехай були вибрані такі ГС:

$$\begin{aligned} X_4 &= X_1 X_2 X_3; & X_5 &= -X_1 X_2, \\ X_6 &= -X_1 X_3; & X_7 &= -X_2 X_3, \end{aligned}$$

що дають відповіді ВК:

$$1 = X_1 X_2 X_3 X_4; \quad 1 = -X_1 X_2 X_3;$$

$$1 = -X_1 X_3 X_6; \quad 1 = -X_2 X_3 X_7.$$

В узагальнюючий визначальний контраст будуть входити вихідні ВК, а також їх сполучення по 2, по 3 і одне сполучення з усіх чотирьох ВК. Загальне число сполучень, які входять у ВК, складає $4+6+4+1=15$ і дає дуже складну картину змішування оцінок коефіцієнтів. Проте змішування оцінок визначати не треба, оскільки мета пробних дослідів при МКС - це визначення напрямку градієнта, тобто оцінка коефіцієнтів $\hat{\alpha}_j$ при факторах згідно з матрицею ДФЕ виду 2^{7-4} . При вибраних ГС були проведені дослідів і одержані значення функції відгуку в точках плану. Виходячи з формули

$$\hat{\alpha}_j = \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i x_{ij} / N$$

Знайдені оцінки коефіцієнтів і рівняння регресії:

$$\hat{y} = 4,45 - 0,09x_1 + 0,64x_2 + 0,89x_3 + 0,71x_4 + 0,54x_5 - 0,16x_6 + 0,46x_7$$

Найбільш суттєвим є фактор X_3 , оскільки коефіцієнт $\hat{\alpha}_3 = 0,89$ за модулем є найбільшим з усієї сукупності $\hat{\alpha}_j$. Для нього встановлюємо крок варіювання, наприклад $X_3 = 0,02$.

Тоді згідно з (5.8) нормований крок варіювання:

$$\lambda = 0,02 / 0,89 \cdot 0,02 = 1,12,$$

звідки відповідно до виразу $\lambda_j = \lambda \hat{\alpha}_j \Delta_j$ знайдемо обчисленні значення кроку варіювання вхідними величинами у природній системі координат, що дозволить одержати координати точок, які лежать в напрямку градієнта. Так, дав змінної X_1 робочий крок варіювання

$$\lambda_1 = 1,12 \cdot (-0,09)^1 \cdot 1,0 = -0,1008 \approx -0,1$$

Аналогічно визначаються й інші λ_j (результати записані у відповідний рядок таблиці).

При крутому сходженні немає необхідності проводити реально всі дослідження – їх можна замінити на «у думці». Для цього на основі співвідношення (5.9) визначають значення X_j і розраховують значення \hat{y}_i .

Таблиця 5.2

Група даних	Впливаючі величини (фактори)		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	\tilde{y}	\hat{y}
Вихідні дані для експерименту	Базовий рівень $X_j^{(0)}$		2	0,1	0,02	4	0,1	0,4	0,4	-	-
	Інтервал варіювання Δ_j		1	0,1	0,02	1	0,1	0,1	0,1	-	-
	Нижній рівень $X_{j\min}$		1	0	0	3	0	0,3	0,3	-	-
	Верхній рівень $X_{j\max}$		3	0,2	0,04	5	0,2	0,5	0,5	-	-
	Кодування з врахуванням генеруючих співвідношень		X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2 X_3$	$-X_1 X_2$	$-X_1 X_3$	$-X_2 X_3$	-	-
Матриця плану ДФЕ	$N = 2^{7-4}$	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1,5	1,5
		2	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	3,5	3,5
		3	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	6,2	6,2
		4	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	3,2	3,2
		5	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	5,3	5,3
		6	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	5,1	5,1
		7	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	5,3	5,32
		8	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	5,8	5,8
Вихідні дані МКВ	Оцінка коефіцієнтів \hat{a}_j	№ досл.	-0,09	0,64	0,89	0,71	0,54	-0,16	0,46	-	-
	Робочий крок λ_j		-0,1	0,07	0,02	0,8	0,06	-0,02	-0,05	-	-
Круте сходження (досліди)	У думці	1	1,9	0,17	0,04	4,8	0,16	0,38	0,45	-	6,95
	У думці	2	1,8	0,24	0,06	5,6	0,22	0,36	0,50	-	9,34
	У думці	3	1,7	0,31	0,08	6,4	0,28	0,34	0,55	-	12,65
	У думці	4	1,6	0,38	0,10	7,2	0,34	0,32	0,60	-	15,51
	Натурний	5	1,5	0,45	0,12	8,0	0,40	0,30	0,65	10,3	16,67
	Натурний	6	1,4	0,52	0,14	8,8	0,46	0,28	0,70	10,5	-
	Натурний	7	1,3	0,59	0,16	9,6	0,52	0,26	0,75	11,0	-
	Натурний	8	1,2	0,66	0,18	10,4	0,58	0,24	0,80	11,5	-
	Натурний	9	1,1	0,73	0,20	11,2	0,64	0,22	0,85	11,2	-
	Натурний	10	1,0	0,80	0,22	12,0	0,70	0,20	0,90	10,1	-

Так, для першого дослід «у думці» розраховані значення вихідної величини:

$$\hat{y}_1 = 4,49 - 0,09 \cdot 0,09 \cdot 1,12 + 0,64 \cdot 0,64 \cdot 1,12 + 0,89 \cdot 0,89 \cdot 1,12 + \\ + 0,71 \cdot 0,71 \cdot 1,12 + 0,54 \cdot 0,54 \cdot 1,12 - 0,16 \cdot 0,16 \cdot 1,12 + 0,46 \cdot 0,46 \cdot 1,12 = 6,55.$$

Аналогічно знайдемо значення вихідної величини для точок у напрямку градієнта, в яких проводяться дослід «у думці», і занесемо в таблицю. Як вже відмічалось, на початковому етапі пошуку екстремуму натурний (реальний) дослід можна ставити через три – п'ять «у думці» і одержані значення $\tilde{y}_5 = 10,3$ порівняти з обчисленим $\hat{y}_5 = 16,67$. Згідно з рис. 5.3 можна припустити, що область екстремуму вже пройдена, тому що $\hat{y}_5 > \tilde{y}_5$, тобто обчислене значення більше реального. Тому наступний (шостий) дослід також необхідно провести натурним, щоб уточнити область екстремуму. Шостий дослід свідчить, що область екстремуму ще не досягнута, бо $\tilde{y}_6 > \tilde{y}_5$. Таким чином, той факт, що в п'ятому досліді обчислені значення \hat{y}_5 більше дослідного значення \tilde{y}_5 можна пояснити тільки тим, що рівняння регресії добре апроксимує поверхню відгуку лише в області базової точки (про це можна судити при співпаданні обчислених і дослідних даних при реалізації ДФЕ 2^{7-4}). Це виходить із того, що ДФЕ 2^{7-4} дає змішування оцінок, тому лінія регресії у всіх точках буде давати значення функції відгуку більше, ніж в експериментальних даних (на рис. 5.3 ця ситуація представлена пунктирною лінією). У подальшому проводимо тільки натурні досліді. Оскільки значення вихідної величини, одержане в шостому досліді, буде більше значень, одержаних в сьомому, а також дев'ятому і десятому досліді, то точка восьмого досліді знаходиться в області часткового екстремуму в знайденому за ДФЄ 2^{7-4} напрямку градієнта.

На цьому закінчується перший цикл крутого сходження, із розгляду якого випливає, що навіть за один цикл досягнуто функцію відгуку ($\tilde{y}_{en} = 11,5$), яке в 2,5 рази перевершує значення в базовій точці $\tilde{y}_0 = 4,49$, що свідчить про ефективність МКС.

Після досягнення області екстремуму проводять її дослідження. Для цієї цілі будують плани більш високого порядку, оскільки поверхня поблизу екстремуму погано апроксимується гіперплощиною.

Як вже відмічалось, про досягнення екстремальної області свідчить зменшення за абсолютною величиною коефіцієнтів при факторах і різке зростання коефіцієнтів моделі, одержаної на основі ПФЕ або ДФЕ в області поточної базової точки.

6. ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ ПРИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ДОСЛІДЖЕННІ

У багатьох практичних завданнях вплив деяких величин на вихідну величину об'єкта неможливо оцінити кількісно. Однак дослідника цікавить питання, наскільки суттєвий вплив того чи іншого фактора (або їх комбінації) на величини, що розглядаються. Нехай, наприклад, яка-небудь технологічна операція виконується паралельно на кількох верстатах. Для правильної організації подальших етапів технологічного процесу треба знати, в якій мірі однотипними є середні розміри деталей, що одержані на паралельно працюючих верстатах. При експериментальних дослідженнях, які проводяться операторами на різному устаткуванні, важливо вивчити вплив двох факторів на результат експерименту – оператора і устаткування. Якщо ж до того дослідження проводились в різний час (або в різних місцях), то вводиться один фактор – час (місце) проведення експерименту. Аналогічне завдання виникає при дослідженні партій виробів, які одержані від різних постачальників при з'ясуванні впливу різних якостей сировини на якість продукції і т. ін.

Нижче будуть розглянуті задачі, пов'язані з експериментальними дослідженнями, зокрема з перевіркою правильності їх організації.

У загальному випадку задача виглядає таким чином.

Нехай:

1) вихідна величина (ознака, відгук) внаслідок фізичних властивостей залежить від n факторів, які не мають кількісного опису, від їх парних взаємодій;

2) кожний фактор можна варіювати на декількох рівнях (експеримент проводять кілька операторів, застосовуються різні методи вимірювання і т. ін.);

3) кожну дослідну операцію можна спостерігати декілька разів, тобто реалізується серія паралельних дослідів.

Треба визначити, в якій мірі на вихідну величину (на фон впливу випадкових величин) впливають дані якісні фактори, зробити їх співвідношення і ранжувати. При цьому вважають, що відгук (ознака) в загальному випадку є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом, дисперсія у всіх дослідях однорідна, тобто накладається умова відтворюваності дослідів. Ці припущення у процесі проведення дослідження необхідно перевірити.

6.1 Однофакторний дисперсійний аналіз

Розглянемо ідеальний варіант – випадкові впливи відсутні, необхідно дослідити вплив тільки одного фактора. Найкращою оцінкою впливу фактора може служити величина, аналогічна дисперсії, що характеризує розсіяння вихідної величини \tilde{y}_i біля деякого середнього значення. Проте не треба забувати, що в даному разі спостерігається тільки аналогія з дисперсіями, оскільки \tilde{y}_i - детерміновані величини, такі величини, які впливають і похибки сприйняття відсутні.

Тоді кількісна оцінка впливу фактора може бути подана у вигляді

$$\hat{\sigma}_x^2 = \sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \bar{y})^2 / N - 1,$$

де N – кількість приладів (рівнів), кожним з яких проводиться одне вимірювання.

У дійсності спостерігається вплив випадкових неврахованих величин, які в сукупності можна позначити ε . Вплив їх представимо у вигляді σ_ε^2 . При

цьому дисперсія вихідної величини вже буде визначатися не тільки впливом фактора X , але й випадковою величиною ε . Співставлення впливу цих величин через співставлення зумовлених ними дисперсій і є основою дисперсійного аналізу. Якщо досліджуваний фактор несуттєвий і дисперсія відтворюваності, яка характеризує один дослід, відома, то загальна дисперсія буде в основному визначатися дисперсією відтворюваності. Якщо ж фактор суттєвий, то можна вважати, що

$$S_0^2\{y\} = \sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

Виходячи з даного співвідношення, можна знайти дисперсію, яку зумовлює фактор, що вивчається. Звичайно дисперсія відтворюваності σ_ε^2 невідома, і її треба знайти за результатами експериментальних досліджень, тому проводять паралельні досліді для кожного рівня варіювання факторів.

Вважатимемо, що дослідження об'єкта проводиться одночасно різними приладами з метою зменшення впливу фактора – приладу на результат дослідження (похибка показань). З'ясуємо, чи можна систематичні похибки приладів вважати однаковими.

Нехай число приладів буде N (фактор варіюється на N рівнях) і для кожного приладу (рівня) проводиться серія з m паралельних дослідів. Число дослідів при реалізації однофакторного дисперсійного аналізу буде $N \cdot m$. Результати дослідів наведені в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

i	$l=1$	$l=2$	\dots	$l=m$	\bar{y}_i
1	\tilde{y}_{11}	\tilde{y}_{12}	\dots	\tilde{y}_{1m}	\bar{y}_1
2	\tilde{y}_{21}	\tilde{y}_{22}	\dots	\tilde{y}_{2m}	\bar{y}_2
\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
N	\tilde{y}_{N1}	\tilde{y}_{N2}	\dots	\tilde{y}_{Nm}	\tilde{y}_N

За результатами дослідження для кожного i – го рівня незалежної змінної (різновидності приладу) знаходять середнє значення (вважаємо однакову кратність проведення дослідів):

$$\bar{y}_i = \sum_{\ell=1}^m \frac{y_{i\ell}}{m}.$$

Розкид значень відгуків у фіксованому рядку (для конкретного приладу) визначається сукупною дією випадкових величин і характеризується оцінкою дисперсії відтворюваності. Розкид між середніми значеннями вихідних величин визначається впливом фактора. Якщо систематичні похибки приладів однакові, то треба чекати підвищеного розсіювання, вибірових засобів середніх \bar{y}_i .

Незміщена оцінка дисперсії відтворюваності для всієї сукупності дослідів визначиться у вигляді

$$S_0^2\{y\} = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m (\tilde{y}_{i\ell} - \bar{y})^2 / (Nm - 1),$$

$$de \bar{y} = \sum_{i=1}^N y_i / N.$$

Розглянемо чисельник даного виразу Q_0^2 , вводячи під дужки $-\bar{y}_i$ і $+\bar{y}_i$:

$$Q_0^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m [(\tilde{y}_{i\ell} - \bar{y}_i) + (\bar{y}_i - \bar{y})]^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m [\tilde{y}_{i\ell} - \bar{y}_i]^2 +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m (\tilde{y}_{i\ell} - \bar{y}_i) \cdot (\bar{y}_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m (\bar{y}_i - \bar{y})^2.$$

Розглянемо окремо другу складову в правій частині виразу Q_0^2 :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m (\tilde{y}_{i\ell} - \bar{y}_i) \cdot (\bar{y}_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \bar{y}) \sum_{\ell=1}^m (\tilde{y}_{i\ell} - \bar{y}_i).$$

Оскільки сума відхилень від середнього в i – й серії дорівнює нулю

$$\sum_{\ell=1}^m (\tilde{y}_{i\ell} - \bar{y}_i) = 0,$$

то і друга складова також дорівнює нулю.

Таким чином, повна сума квадратів відхилень окремих спостережень від \bar{y} :

$$Q_0^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m (\tilde{y}_{il} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m (\tilde{y}_{il} - \bar{y}_i)^2 + m \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \bar{y})^2,$$

або в скороченому вигляді: $Q_0^2 = Q_\varepsilon^2 + Q_x^2$,

$$\text{де } Q_0^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m (\tilde{y}_{il} - \bar{y})^2; \quad Q_\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m (\tilde{y}_{il} - \bar{y}_i)^2;$$

$$Q_x^2 = m \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \bar{y})^2.$$

Складова Q_x^2 являє собою суму квадратів різниць між середніми \bar{y}_i окремих серій (рядків, прикладів) і загального середнього \bar{y} за всією сукупністю спостережень і характеризує ступень розходження систематичних похибок в окремих прикладах. Її ще називають «розсіянням за факторами».

Складова Q_ε^2 являє собою суму квадратів різниць між окремими спостереженнями і середнім відповідним серії \bar{y}_i (середнє значення показів даного прикладу) і характеризує «залишкове розсіювання» випадкових похибок дослідів.

Таким чином, повне розсіювання показів приладів Q_0^2 складається із двох компонент, характеризуючи розсіювання між приладами, тобто різниці між їх систематичними похибками Q_x^2 і розсіяння «в середині» приладів (серій), яке характеризує однакову (на основі передумов дисперсійного аналізу) для всіх приладів варіацію під дією випадкових величин Q_ε^2 .

Вважаємо, що гіпотеза рівності систематичних похибок правильна, тому нормальні розподіли для всіх приладів тотожні, тобто похибки мають однаковий центр розподілу (систематична похибка) і дисперсію σ_x^2 . У цьому випадку всі Nm спостережень можна розглядати як вибірку із однієї і тієї ж

нормальної сукупності, а $Q_0^2 / (Nm - 1)$, як вже відмічалось, є незміщеною оцінкою дисперсії σ_x^2 за цією вибіркою.

Звідси виходить, що відношення $Q_0^2 / \sigma_\varepsilon^2$ буде відповідати розподілу χ^2 з $(Nm - 1)$ ступенями свободи.

Проте середні за групами (приладами) \bar{y}_i також згідно з припущенням нормально розподілені з дисперсією $|\sigma_\varepsilon^2 / m|$ кожна, і незалежні одна від одної. Тому

$$\sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \bar{y})^2 / (N - 1) = Q_x^2 / m(N - 1)$$

є незміщеною вибірковою характеристикою дисперсії $|\sigma_\varepsilon^2 / m|$, одержаної на основі N спостережень величини \bar{y}_i . У результаті можна зробити висновок, що величина

$$\frac{Q_x^2}{m} \bigg/ \frac{\sigma_\varepsilon^2}{m} = \frac{Q_x^2}{Q_\varepsilon^2} = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m (\bar{y}_i - \bar{y})^2 / \sigma_\varepsilon^2$$

розподілена за законом χ^2 з $(N - 1)$ ступенями свободи.

Сума квадратів відхилень від середнього в кожній серії, віднесена до дисперсії

$$\sum_{i=1}^m (\tilde{y}_{i\ell} - \bar{y}_i)^2 / \sigma_\varepsilon^2,$$

також розподілена за законом χ^2 з $(m - 1)$ ступенями свободи.

Відповідні властивості композиції для N серій (приладів), компонента

$$Q_\varepsilon^2 / \sigma_\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m (\tilde{y}_{i\ell} - \bar{y}_i)^2 / \sigma_\varepsilon^2$$

також розподілена за законом χ^2 з $N(m - 1)$ ступенями свободи. Таким чином, $Q_\varepsilon^2 / N(m - 1)$ є також оцінкою параметра σ_ε^2 .

Із викладеного випливає, що у разі рівності систематичних похибок приладів (несуттєвості впливу фактора, що досліджується) існують три незміщені оцінки σ_ε^2 . Відношення двох однорідних оцінок дисперсій

$$F_p = [Q_x^2 / (N - 1)] / [Q_\varepsilon^2 / N(m - 1)] \quad (6.1)$$

відповідатиме F - розподілу з $(N-1)$ і $N(m-1)$ ступенями свободи. Задаючись α рівнем значущості, на основі таблиці F - розподілу можна встановити відповідну α границю, так що

$$P(F_p \succ F_T) = \alpha / 100.$$

Розглянемо випадок, коли фактор, що досліджується, суттєвий, тобто гіпотеза про рівність систематичних похибок (центрів розподілу випадкових похибок) невірна, але параметр σ_ε^2 у всіх N сукупностях один і той же. Зміна центрів рядків розподілів, тобто зміна $\tilde{y}_{i\ell}$ на $\tilde{y}_{i\ell} - c_i$ (де c_i - систематична складова похибки i -го приладу) не змінить значення Q_ε^2 що, як і раніше, розподілено за законом χ^2 з $N(m-1)$ ступенями свободи, а $Q_x^2 / N(m-1)$ залишається незміщеною оцінкою σ_ε^2 .

Проте чисельник виразу (6.1) саме враховує розходження між центрами розподілу C_i і має тенденцію до збільшення при збільшенні розходження між систематичними складовими. Тому правило перевірки правильності висунутої гіпотези можна подати в наступному вигляді: гіпотеза $c_1 = c_2 = \dots = c_n$ приймається, якщо $F_p \succ F_T$, і відкидається, якщо $F_p \prec F_T$.

Таблиця 6.2

Компонента дисперсії	Середній квадрат	Ступінь свободи
Між факторами	$\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m (\bar{y}_i - \bar{y})^2$	$N-1$
Всередині серії	$\frac{1}{Nm-m} \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m (\bar{y}_{i\ell} - \bar{y}_i)^2$	$N(m-1)$
Повна (загальна)	$\frac{1}{Nm-1} \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m (\bar{y}_{i\ell} - \bar{y})^2$	$Nm-1$

Таблиця 6.3

Номер приладу	Результат вимірювання				
	1	2	3	4	5
1	98/-4	98/-2	79/-21	96/-4	96/-4
2	107/+7	111/+11	130/+30	128/+28	127/+27
3	119/+19	102/+2	87/-13	91/-9	102/+2

Схема однофакторного дисперсійного аналізу може бути представлена у вигляді табл. 6.2, 6.3.

Розглянемо приклад застосування однофакторного дисперсійного аналізу для визначення відмінності систематичних похибок трьох приладів ($N=3$). Одне і те ж значення вихідної величини об'єкта дослідження вимірювалось цими приладами п'ять раз (кратність проведення досліду – число дослідів всередині серії $m=5$). Одержані результати наведені в табл. 6.3. Для спрощення обчислень відніmemo з усіх граф таблиці число 100 (при цьому значення дисперсій не зміниться), а також використаємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^k (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^k x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=1}^k \bar{x}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^k x_i^2 - 2k\bar{x}(\sum_{i=1}^k x_i / k) + k\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 - k\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 - (\sum_{i=1}^k x_i)^2 / k. \end{aligned}$$

Таблиця 6.4

i	y_{i1}^2	y_{i2}^2	y_{i3}^2	y_{i4}^2	y_{i5}^2	$\sum_{i=1}^m y_{i\ell}$	$(\sum_{i=1}^m y_{i\ell})^2$	$\sum_{i=1}^m y_{i\ell}^2$
1	16	4	441	16	16	-35	1225	493
2	49	121	900	784	729	103	10609	2583
3	361	4	169	81	4	1	1	619
$\sum_{i=1}^N$	426	129	1510	881	749	69	11835	3695

Перетворені значення результатів відтворювання наведені в знаменнику відповідної графі табл. 6.3. На основі останнього співвідношення одержимо зручні для розрахунку формули, що не потребують середніх значень. Для повної суми квадратів Q_0^2 , беручи до уваги, що $k = \lambda m$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m (y_{i\ell} - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m y_{i\ell}^2 - \frac{1}{Nm} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m y_{i\ell} \right)^2.$$

Для суми квадратів між приладами Q_x^2

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m (y_i - \bar{y})^2 &= m \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = m \left[\sum_{i=1}^N \bar{y}_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \bar{y}_i \right)^2 \right] = \\ &= m \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\sum_{\ell=1}^m y_{i\ell} / m \right)^2 - \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{\ell=1}^m y_{i\ell} / m \right) \right]^2 \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{\ell=1}^m y_{i\ell} \right)^2 / m - \left(\sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m y_{i\ell} \right)^2 / Nm. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Для суми квадратів всередині приладів Q_ε^2

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m (y_{i\ell} - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m y_{i\ell}^2 - \sum_{i=1}^N \left(\sum_{\ell=1}^m y_{i\ell} \right)^2 / m. \quad (6.3)$$

Для визначення Q_x^2 і Q_ε^2 обчислимо відповідні складові виразів (6.2), (6.3), виходячи із табл. 6.3.

Щоб оцінити, чи однакові систематичні похибки приладів $N=3$, необхідно, використовуючи вирази (6.2), (6.3) і дані табл. 6.4, знайти (при умові $m=5$):

$$\begin{aligned} Q_x^2 &= \left(\frac{11835}{5} - \left(\frac{69^2}{3 \cdot 5} \right) \right) = 2050; \\ Q_\varepsilon^2 &= 3695 - \left(\frac{11835}{5} \right) = 1328. \end{aligned}$$

Число ступенів свободи визначаємо згідно з табл. 6.2:

$$\begin{aligned} S_x^2 &= Q_x^2 / (N - 1) = 2050 / (3 - 1) = 1025; \\ S_\varepsilon^2 &= Q_\varepsilon^2 / N(m - 1) = 1328 / 3(5 - 1) = 111. \end{aligned}$$

Тепер можна перевірити нульову гіпотезу про рівність систематичних похибок приладів. Для цього знайдемо розраховані значення коефіцієнта Фішера:

$$F_p = \frac{S_x^2}{S_\varepsilon^2} = 9,3$$

Порівняємо знайдене значення з табличним F_m . Задаючись рівнем статистичної значущості $\alpha=5\%$, за таблицею знайдемо значення $F_m = 3,88$. Таким чином $F_p \succ F_m$, тому гіпотеза про рівність систематичних похибок приладів відкидається.

Якщо ж припущення про те, що дисперсія σ_ε^2 залишається однією і тією ж для всієї сукупності приладів, то можна знайти оцінку дисперсії S_ε^2 на основі того, що $N(m-1)S_\varepsilon^2 / \sigma_\varepsilon^2$ має розподіл χ^2 з $N(m-1)$ ступенями свободи і довірчий інтервал для неї. Дійсно, для i -го приладу при l -му вимірюванні

$$y_{il} = c_i + \varepsilon_{il},$$

де c_i – систематична похибка i – го приладу;

ε_{il} - l -та реалізація випадкової похибки. Тоді

$$Q_\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^l \left[c_i + \varepsilon_{il} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (c_i + \varepsilon_{il}) \right]^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^l \left(\frac{m-1}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_{il} \right)^2.$$

Звідки

$$S_\varepsilon^2 = Q_\varepsilon^2 / N(m-1); \quad M\{S_\varepsilon^2\} = \sigma_\varepsilon^2. \quad (6.4)$$

Як вже було сказано, для даного випадку

$$S_x^2 = Q_x^2 / (N-1),$$

$$\text{де } Q_x^2 = m \sum_{i=1}^N \left[c_i + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_{il} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(c_i + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_{il} \right) \right]^2.$$

Позначимо $\bar{c} = \sum_{i=1}^N c_i / N$ й одержимо

$$M\{S_x^2\} = \sigma_\varepsilon^2 + \frac{m}{N-1} \sum_{i=1}^N (c_i - \bar{c})^2. \quad (6.5)$$

Отже, дисперсія між приладами (факторами) несе інформацію як про дисперсію випадкової величини σ_ε^2 , так і про усереднене відхилення систематичних похибок. Із виразів (6.4) і (6.5) випливає, що

$$M\left\{(S_x^2 - S_\varepsilon^2) \frac{N-1}{Nm}\right\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (c_i - \bar{c})^2 = \delta_c \quad (6.6)$$

де δ_c^2 є мірою зміни систематичних похибок.

За результатами вибірки можна визначити оцінку δ_c^2 у вигляді

$$\delta_c^2 = \frac{N-1}{Nm} (S_x^2 - S_\varepsilon^2).$$

Крім того, за результатами проведеного дисперсійного аналізу можна оцінити розходження (неузгодженість) між систематичними похибками i -го і j -го приладів. Для цього знайдемо значення коефіцієнта

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} [\bar{y}_i - \bar{y}_j - (c_i - c_j)] / S_\varepsilon^2,$$

який відповідає розподілу Ст'юдента з $N(m-1)$ ступенями свободи (в припущенні $\sigma_\varepsilon = \text{const}$).

На основі знайденого коефіцієнта t за числом ступенів свободи $N(m-1)$ можна визначити довірчий інтервал для різниці $c_i - c_j$ у вигляді

$$(\bar{y}_i - \bar{y}_j) \pm t.$$

На практиці зустрічаються випадки, коли число спостережень в серіях різне. Позначивши через m_i число спостережень i -ї групи (серії) при $\sum_{i=1}^N m_i = k$, одержимо

$$y_i = \sum_{\ell=1}^{m_i} y_{i\ell} / m_i; \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^{m_i} y_{ij} / k = \sum_{i=1}^N m_i \bar{y}_i / k.$$

Основне співвідношення дисперсійного аналізу залишиться в наступному вигляді:

$$Q_0^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^{m_i} (y_{i\ell} - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^N m_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^m (y_{i\ell} - \bar{y}_i)^2 = Q_x^2 + Q_\varepsilon^2.$$

Розглянемо приклад проведення дисперсійного аналізу для випадку, коли число спостережень у групах різне. Для чотирьох складів гумової суміші перевіряли запас міцності на розтяг. Із кожного складу було виготовлено по чотири однакових зразка. Мета випробувань полягала у визначенні міцності кожного зразка, виборі найкращого і одержанні оцінки експериментальної похибки.

Таблиця 6.5

A	B	C	D
3210/42	3225/45	3220/44	3545/109
3000/0	3320/64	3410/82	3600/120
3315/63	3165/33	3320/64	3580/116
-	3145/29	3370/74	3185/97

Один із зразків суміші А за зовнішніми ознаками одразу був визнаний дефектним і виключений з випробувань. Результати досліджень наведені в чисельниках граф табл. 6.5.

Для спрощення обробки й аналізу даних віднімо з кожного значення 3000 і поділимо на 5. Ці кодовані дані представлені в знаменниках граф. При цьому відношення середніх квадратів не змінюється, а дисперсія випадкових величин складає 1/25 початкової. Після обчислень маємо:

$$\sum_{\ell=1}^3 y_{1\ell} = 105; \quad \sum_{\ell=1}^4 y_{2\ell} = 171; \quad \sum_{\ell=1}^4 y_{3\ell} = 264; \quad \sum_{\ell=1}^4 y_{4\ell} = 442; \\ \sum_{i=1}^4 \sum_{\ell=1}^{m_i} y_{i\ell} = 982; \quad \sum_{i=1}^4 \sum_{\ell=1}^{m_i} y_{i\ell}^2 = 81162; \quad N = 4; \quad k = 15.$$

Тоді середній квадрат між сумішами:

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N m_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{3} \left[\sum_{i=1}^N m_i^{-1} \left(\sum_{\ell=1}^{m_i} y_{i\ell} \right)^2 - \frac{1}{15} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^{m_i} y_{i\ell} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \cdot 105^2 + \frac{1}{4} \cdot 171^2 + \frac{1}{4} \cdot 264^2 + \frac{1}{4} \cdot 442^2 - \frac{1}{15} \cdot 982^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{3} (77250,25 - 64288,27) = 4320,66.$$

Середній квадрат всередині сумішей:

$$S_\varepsilon^2 = \frac{1}{k-N} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^{m_i} (y_{i\ell} - \bar{y}_i)^2 \right) = \frac{1}{11} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^{m_i} y_{i\ell}^2 - \sum_{i=1}^N m_i^{-1} \left(\sum_{\ell=1}^{m_i} y_{i\ell} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{11} (81162 - 77250,25) = 355,61.$$

Розраховане значення коефіцієнта Фішера

$$F_p = \frac{4320,66}{355,61} = 12,15.$$

Табличне значення F_m за ступенями свободи з і 11 і $(1-\alpha) = 0,999$ менше розрахованого, тому можна зробити висновок про різницю середнього запасу міцності на розтяг для чотирьох складів гумових сумішей.

95% довірчих інтервалів для середнього запасу міцності на розтяг кожної із цих сумішей визначаємо за формулою

$$\bar{y}_i \pm t S_\varepsilon / \sqrt{m_i},$$

де t знаходимо з таблиці розподілу Ст'юдента за числом ступенів свободи 11, оскільки оцінка σ_ε^2 заснована на 11 ступенях свободи із загального числа їх 14.

7. ПРИКЛАДИ ТА ЗАВДАННЯ

Приклад 1. Дано результати двадцяти вимірювань довжини l_i , мм. деталі:

18,309; 18,305; 18,306; 18,306;
 18,308; 18,308; 18,309; 18,313;
 18,307; 18,312; 18,310; 18,305;
 18,309; 18,309; 18,303; 18,307;
 18,310; 18,304; 18,308; 18,308.

Як оцінку математичного очікування довжини деталі приймаємо її середнє арифметичне

$$\bar{\ell} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} \ell_i = 18,3078 \text{ мм.}$$

Точкова оцінка середнього квадратичного відхилення результатів спостережень складає:

$$S_{\ell} = \sqrt{\frac{1}{20-1} \sum_{i=1}^{20} (\ell_i - \bar{\ell})^2} = 0,0025 \text{ мм.}$$

Прийнявши рівень довірчої ймовірності $\alpha = 1 - q = 90\% = 0.9$, знаходимо для числа ступенів свободи $k=n-1=20-1=19$ в таблиці Додатку:

$$\chi_{\hat{e}; \frac{1}{2}g}^2 = \chi_{19; 0,05}^2 = 10,117; \chi_{19; 0,05} = 3,18,$$

$$\chi_{k.1 - \frac{1}{2}g}^2 = \chi_{19; 0,95}^2 = 30,114; \chi_{19; 0,95} = 5,49.$$

Границі довірчого інтервалу для середнього квадратичного відхилення результатів

$$\text{спостережень } S_{\ell_1} = \frac{\sqrt{20-1} * 0.0025}{3.18} = 0.0034 \text{ мм}$$

$$S_{\ell_2} = \frac{\sqrt{20-1} * 0.0025}{5.49} = 0.0020 \text{ мм.}$$

Одержані результати свідчать, що істинне значення середнього квадратичного відхилення результатів спостережень з ймовірністю 90% лежить в інтервалі 0,0020-0,0034мм.

Приклад 2. Нехай при вимірюванні довжини стержня були одержані такі значення:

I	ℓ_i , мм	$\ell_i - \ell_0$, мм	$(\ell_i - \ell_0)^2$, мм ²
1	153,4	-1,6	2,56
2	154,6	-0,4	0,16
3	154,7	-0,3	0,09
4	155,0	0	0
5	164,3	+9,3	86,49
6	154,5	-0,5	0,25
Сума		+6,5	89,55

$$\bar{\ell} = 156,08 \text{ мм}$$

Перевіримо, чи не є $\ell_5 = 164,3$ мм промахом.

$$\text{Знайдемо } \frac{n-1}{n} \Delta S_n^2; \quad \frac{n-1}{n} \Delta S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ell_i - \bar{\ell})^2 = 13,76 \text{ мм}^2.$$

Приклад 3. За результатами 5-ти спостережень було знайдено довжина стержня.

Результат вимірювань становить $L = (15,785 \pm 0,005) \text{ мл.}$, де $S_{\bar{x}} = 0,005 \text{ мл.}$ Треба оцінити

ймовірність того, що істинне значення довжини відрізняється від середнього із п'яти спостережень не більш ніж на 0,01 мл.

Обчислити значення дробу:

$$t_p = \frac{0,010}{S_{\bar{x}}} = \frac{0,010}{0,005} = 2$$

і число ступенів свободи:

$$k = n - 1 = 5 - 1 = 4$$

За даними таблиці знаходимо значення довірчої ймовірності, де $t_p=2$ і $k=4$:

$$P\{\bar{x} - Q|0.10\} = P\{\bar{x} - Q|2S_{\bar{x}}\} = 88,38\% .$$

Для $t_p = 3$ ця ймовірність складає

$$P\{\bar{x} - Q|3S_{\bar{x}}\} = P\{\bar{x} - Q|0.015\} = 96\% .$$

Результат вимірювання:

$$L = 15,785 \pm 0,010 \text{ мл.} \quad P = 88,38\% .$$

Для $t_p=1$ довірча ймовірність складає приблизно 62%, тому

$$L = 15,785 \pm 0,005 \text{ мл.} \quad P = 96\% .$$

Приклад 4. За умовами попередньої задачі знайти довірчу границю похибки результатів вимірювань для довірчої ймовірності $P=99,0\%$. За даними таблиці при $k=4$ знаходимо $t_p=4,604$ і відповідно довірча границя складає

$$\delta_{99,0\%} = t_{99,0\%} S_{\bar{x}} = 4,604 \cdot 0,005 = 0,023 \text{ мм.}$$

Результат вимірювань:

$$L = 15,785 \pm 0,023 \text{ мм} \quad P = 99,0\% .$$

Приклад 5. Перевірити нормальність розподілу табл. 1, дані якого $\bar{x} = 9,9193 \text{ мм}$ і $S_x = 0,0028 \text{ мм}$. Обчислення зручно звести в табл. 2.

Таблиця 1

i	$x_i, \text{мм}$	$x_{i+1}, \text{мм}$	m_i	P_i^*	$p_i^*, \text{мм}^{-1}$
1	8,911	8,913	1	0,01	5
2	8,913	8,915	5	0,05	25
3	8,915	8,917	14	0,14	70
4	8,917	8,919	27	0,27	135
5	8,919	8,921	24	0,24	120
6	8,921	8,923	18	0,18	90
7	8,923	8,925	9	0,09	45
8	8,925	8,927	2	0,02	10

Інтервал складає $\Delta x_i = 0,002 \text{ мм}$, щільність нормованого нормального розподілу $P_i^{(t)}$ взяти з таблиці Додатку. Число ступенів свободи $k = 8 - 2 - 3 = 3$, оскільки чотири інтервали були об'єднанні в два. Задаючись рівнем значущості $q = 0,10$, знаходимо в таблиці Додатку $X_{3;0,05}^2 = 0,352$ $X_{3;0,95}^2 = 7,815$. Таким чином розподіл експериментальних даних можна вважати нормальним.

Таблиця 2

Середина інтервалу x_i	Частота m_i	Відхилення від середнього $x_i - \bar{x}$	Нормоване відхилення від середнього арифметично то $t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$	Щільність нормованого розподілу $p^{(t_i)}$	Щільність в середніх інтервалах $\bar{p}_i^{(t)} / s_x$	Теоретична частота $nP_i = n\Delta X_i p(X_i)$	Відхилення χ_i^2
8,912	1	-0,00736	-2,53	0,0163	5,8	1,16	0,0180
8,914	5	-0,00536	-1,92	0,0632	22,6	4,52	
8,916	14	-0,00336	-1,20	0,1942	69,5	13,9	0,0007
8,918	27	-0,00136	-0,485	0,3546	126,7	25,34	0,1086
8,920	24	+0,00064	+0,229	0,3885	138,8	27,76	0,5092
8,922	18	+0,00264	+0,943	0,2558	91,3	18,26	0,0037
8,924	9	+0,00464	+1,66	0,1006	36	7,2	
8,926	2	+0,00664	+2,37	0,0241	8,6	1,72	0,4850

Приклад 6. При вимірюванні температури були отримані результати, подані в другому рядку таблиці. Треба визначити, чи не містить результат $t_8 = 20,30^\circ \text{C}$ грубої похибки.

i	$t_i^\circ \text{C}$	v_i	$v_i^2 \cdot 10^4$	v_i	$(v_i)^2 \cdot 10^4$
1	20.42	+0.016	2.56	+0.009	0.81
2	20.43	+0.026	2.75	+0.019	3.61
3	20.40	-0.004	0.16	-0.011	1.21
4	20.43	+0.026	6.76	+0.019	3.61
5	20.42	+0.016	2.56	+0.009	0.81
6	20.43	+0.026	6.76	+0.019	3.61
7	20.39	-0.014	1.96	-0.021	4.41
8	20.30	-0.104	108.16	-	-
9	20.40	-0.004	0.16	-0.011	1.21
10	20.43	+0.026	6.76	+0.019	3.61
11	20.42	+0.016	2.56	+0.009	0.81
12	20.41	+0.006	0.36	-0.001	0.01
13	20.39	-0.014	1.96	-0.021	4.41
14	20.39	-0.014	1.96	-0.021	4.41
	20.40	-0.004	0.16	-0.011	1.21
$\bar{t} = 20.404^\circ \text{C}$			$S_t = 0.033^\circ$		$S_t = 0.016^\circ$
$\bar{t}' = 20.411^\circ \text{C}$					

Спочатку знаходимо середнє арифметичне і середнє квадратичне відхилення результатів спостереження:

$$\bar{t} = 20,404^0 c ; S_t = 0,033^0 c.$$

Якщо прийняти довірчу ймовірність $\alpha=0,95$ то з таблиці Додатку при $n=15$, $v_{0,95}=2,493$ і оскільки

$$v = \frac{t - t_{\min}}{S_t} = \frac{t - t_8}{S_t} = \frac{20,404 - 20,30}{0,033} = 3,16$$

$v > v_{0,95}$, результат t_8 містить грубу похибку.

Якщо відкинути цей результат і перевірити обчислюванню, то середнє арифметичне буде $\bar{t}' = 20,411^0 c$, а середнє квадратичне відхилення зменшиться до $S_t' = 0,016^0 c$.

Розрахунок наведено в двох останніх рядках таблиці.

Приклад 7. Визначити способом найменших квадратів параметри А і В залежності:

$$\Delta = A + B \cdot R_z.$$

Значення величин представлені в таблиці 1.

Таблиця 1

i	R _{z, МКМ}	Δ	i	R _{z, МКМ}	Δ
1	0.072	2.8	7	0.140	3.0
2	0.080	2.6	8	0.140	3.4
3	0.112	3.2	9	0.183	3.7
4	0.120	2.9	10	0.208	4.1
5	0.130	3.1	11	0.241	4.5
6	0.136	3.4	12	0.268	4.8

Систему рівнянь одержуємо підстановкою табличних даних в рівняння залежності:

$$A + B \cdot (R_z)_i = \Delta_i, \quad i=1,2,\dots,12.$$

Таким чином, число (n) рівнянь дорівнює дванадцяти, число (m) невідоме двом (А і В). В позначеннях Гаусса система нормальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} [a_{i1}^2] \hat{A} + [a_{i1} a_{i2}] \hat{B} = [a_{i1} l_i] \\ [a_{i1} a_{i2}] \hat{A} + [a_{i2}^2] \hat{B} = [a_{i2} l_i] \end{cases}$$

де А і В - оцінки параметрів, що відшукуються $a_{i1}=1$, $a_{i2}=(R_z)_i$, $l_i=\Delta_i$.

Приклади обчислення коефіцієнтів у системі наведені в таблиці 2.

Таким чином, $[a_{i1}^2] = 12$; $[a_{i2}^2] = 0,319782$; $[a_{i1} a_{i2}] = 1,830$; $[a_{i1} l_i] = 41,5$; $[a_{i2} l_i] = 6,7782$.

Для системи нормальних рівнянь одержуємо:

$$\begin{cases} 12 \hat{A} + 1,830 \hat{B} = 41,5 \\ 1,830 \hat{A} + 0,319782 \hat{B} = 6,7782, \end{cases}$$

Таблиця 2

i	a_{i1}	a_{i1}^2	a_{i2}	a_{i2}^2	$a_{i1}a_{i2}$	ℓ_i	$a_{i1}\ell_i$	$a_{i2}\ell_i$
1	1	1	0,072	0,005184	0,072	2,8	2,8	0,2016
2	1	1	0,080	0,006400	0,080	2,6	2,6	0,2080
3	1	1	0,112	0,012544	0,112	3,2	3,2	0,3584
4	1	1	0,120	0,014400	0,120	2,9	2,9	0,3480
5	1	1	0,130	0,016900	0,130	3,1	3,1	0,4030
6	1	1	0,136	0,018496	0,136	3,4	3,4	0,2624
7	1	1	0,140	0,019600	0,140	3,0	3,0	0,4200
8	1	1	0,140	0,019600	0,140	3,4	3,4	0,4760
9	1	1	0,183	0,033489	0,183	3,7	3,7	0,6771
10	1	1	0,208	0,043264	0,208	4,1	4,1	0,8528
11	1	1	0,241	0,058081	0,241	4,5	4,5	1,0845
12	1	1	0,268	0,071824	0,268	4,8	4,8	1,2864
Суми		12		0,319782	1,830		41,5	6,7782

звідки знаходимо оцінки $\hat{A} = 1,7746$; $\hat{B} = 11,0411$.

В загальному вигляді вирішення системи нормальних рівнянь запишемо

$$\hat{A} = \frac{[a_{i1}l_i][a_{i2}^2] - [a_{i2}l_i][a_{i1}a_{i2}]}{[a_{i1}^2][a_{i2}^2] - [a_{i1}a_{i2}]^2}$$

$$\hat{B} = \frac{[a_{i2}l_i][a_{i1}^2] - [a_{i1}l_i][a_{i1}a_{i2}]}{[a_{i1}^2][a_{i2}^2] - [a_{i1}a_{i2}]^2}.$$

Можна переписати так: $\hat{A} = [\alpha_{Ai}l_i]$; $\hat{B} = [\alpha_{Bi}l_i]$,

де

$$\alpha_{\hat{A}i} = \frac{a_{i1}[a_{i2}^2] - a_{i2}[a_{i1}a_{i2}]}{[a_{i1}^2][a_{i2}^2] - [a_{i1}a_{i2}]^2} \quad \alpha_{\hat{B}i} = \frac{a_{i2}[a_{i1}^2] - a_{i1}[a_{i1}a_{i2}]}{[a_{i1}^2][a_{i2}^2] - [a_{i1}a_{i2}]^2}.$$

Визначення цих коефіцієнтів зручно обчислювати, як показано в таблицях 3, 4, 5.

Тепер за формулою $v_i = l_i - a_{i1}\hat{A} - a_{i2}\hat{B}$ можна обчислити остаточні похибки, їх квадрати і суму квадратів.

Оцінка для дисперсії похибок складає

$$S_i^2 = \frac{1}{12-2} \sum_{i=1}^{12} V_i^2 = \frac{0,286607}{10} = 0,028661 \quad S_i = 0,169.$$

Знаходимо оцінки середнього квадратичного відхилення результатів сумісних вимірів параметрів А і В залежності

$$S_{\hat{A}} = Sl \sqrt{\sum_{i=1}^{12} \alpha_{\hat{A}i}^2} = 0,137; S_{\hat{B}} = Sl \sqrt{\sum_{i=1}^{12} \alpha_{\hat{B}i}^2} = 0,84.$$

Таблиця 3

i	$a_{i1}[a_{i2}^2]$	$a_{i2}[a_{i1}a_{i2}]$	2-3	$\alpha_{\hat{A}_i}$	$\alpha_{\hat{A}_i}^2$
1	2	3	4	5	6
1	0,319782	0,13176	0,188022	0,385	0,148225
2	0,319782	0,14640	0,173382	0,355	0,126025
3	0,319782	0,20496	0,114822	0,236	0,055696
4	0,319782	0,21960	0,100182	0,205	0,042025
5	0,319782	0,23790	0,081882	0,168	0,028224
6	0,319782	0,24888	0,070902	0,145	0,021025
7	0,319782	0,25620	0,063582	0,130	0,016900
8	0,319782	0,25620	0,063582	0,130	0,016900
9	0,319782	0,33489	-0,015108	-0,031	0,000961
10	0,319782	0,38064	-0,060858	-0,125	0,015625
11	0,319782	0,44103	-0,121248	-0,248	0,061504
12	0,319782	0,49044	-0,170658	-0,350	0,122500
Сума					0,655610

Таблиця 4

i	$a_{i2}[a_{i1}^2]$	$a_{i1}[a_{i1}a_{i2}]$	2-3	$\alpha_{\hat{B}_i}$	$\alpha_{\hat{B}_i}^2$
1	2	3	4	5	6
1	0,864	1,830	-0,966	-1,980	3,920400
2	0,960	1,830	-0,870	-1,780	3,168400
3	1,344	1,830	-0,486	-0,994	0,988036
4	1,440	1,830	-0,390	-0,799	0,638401
5	1,560	1,830	-0,270	-0,553	0,305809
6	1,632	1,830	-0,198	-0,406	0,164836
7	1,680	1,830	-0,150	-0,307	0,094249
8	1,680	1,830	-0,150	-0,307	0,094249
9	2,196	1,830	+0,366	+0,750	0,562500
10	2,496	1,830	+0,666	+1,365	1,863225
11	2,892	1,830	+1,062	+2,17	4,708900
12	3,216	1,830	+1,386	+2,84	8,065600
Сума					24,574605

Таблиця 5

i	l_i	$a_{i2}\hat{B}$	$a_{i1}\hat{A}$	v_i	v_i^2
1	2.8	0.7949	1.7746	-0.2305	0.052900
2	2.6	0.8832	1.7746	+0.0578	0.003340
3	3.2	1.2365	1.7746	-0.1889	0.035721
4	2.9	1.3248	1.7746	+0.1994	0.039601
5	3.1	1.4352	1.7746	+0.1098	0.012100
6	3.4	1.5014	1.7746	-0.1240	0.015376
7	3.0	1.5456	1.7746	+0.3202	0.102400
8	3.4	1.5456	1.7746	-0.0798	0.006400
9	3.7	2.0203	1.7746	+0.0949	0.009025
10	4.1	2.2923	1.7746	-0.0331	0.001096
11	4.5	2.6606	1.7746	-0.0648	0.004199
12	4.8	2.9587	1.7746	-0.0667	0.004449
Сума					0.286607

Значення суми квадратів коефіцієнтів $\alpha_{\hat{A}_i}$ і $\alpha_{\hat{B}_i}$ взяті з табл. 3 і 4.

Остаточні результати вимірювань записують в такому вигляді:

$$A = 1,775 \pm 0,137, B = 11,04 \pm 0,84.$$

Приклад 8. Досліджується новий цифровий термометр, прототипом якого за попередніми даними може бути серійний термометр типу ТТЦ-2 для контактного вимірювання температури поверхні нагрітих об'єктів до 100^0C (методом парної кореляції).

При попередньому дослідженні виявлені основні технічні параметри досліджуваного термометра, серед яких:

- поріг чутливості – y_1 ;
- роздільна здатність – y_2 ;
- основна похибка – y_3 ;
- нижня межа вимірювань – y_4 ;
- максимальне значення оточуючої температури – y_5 .

Після проведення попередніх експериментів отримуємо матрицю коефіцієнтів парної кореляції, яка подана в таблиці:

Параметри оптимізації	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_1	1	+0,014	-0,057	0,108	+0,489
y_2		1	+0,106	+0,148	+0,676
y_3				+0,148	-0,594
y_4				1	-0,886
y_5					1

У результаті аналізу, проведеного за даними таблиці, можна зробити такий висновок:

- від параметра y_5 можна відмовитися, а за параметр оптимізації доволіно вибрати основну похибку y_3 як таку, що легко піддається перевірці з трьох найближчих параметрів y_1, y_2, y_3 .

Приклад 9. Побудувати плани розширених (з урахуванням факторів взаємодії) повних факторних експериментів типів $2^2, 2^3$.

Ці плани типів $2^2, 2^3$, відповідно, подані у таблиці 1 і 2.

Таблиця 1

№ досліду	Кодовані значення факторів		Кодовані значення факторів взаємодії
	x1	x2	$X_{12}=X_1*X_2$
1	+1	+1	+1
2	-1	+1	-1
3	-1	-1	-1
4	-1	-1	+1

Таблиця 2

№ досліду	Кодовані значення факторів			Кодовані значення взаємодії			
	x1	x2	x3	$X_{12}=X_1+X_2$	$X_{13}=X_1*X_3$	$X_{23}=X_2*X_3$	$X_{123}=X_1*X_2*X_3$
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
2	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
3	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
4	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
5	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
6	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
7	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
8	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1

Приклад 10. Досліджується якість харчового продукту, термін зберігання якого залежить від температури зберігання в діапазоні від 10^0 до 40^0C й вологості від 30 до 100%.

Побудуємо матрицю даних табл. 1 і 2.

Таблиця 1

Рівні факторів та інтервали варіювання	Натуральні значення для кодovаних позначень факторів	
	X1 (температура)	X2 (вологість)
Верхній рівень	40	100
Нижній рівень	10	30
Нульовий рівень	25	65
Інтервал варіювання	15	35

й матрицю планування експерименту з урахуванням фактора взаємовпливу.

Таблиця 2

№ дослідів	Кодовані значення факторів		
	x1	x2	x1 x2
1	+1	+1	+1
2	-1	+1	-1
3	+1	-1	-1
4	-1	-1	+1

Математична модель в кодованих значеннях має такий вигляд:

$$Y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2 + \hat{a}_{12} x_1 x_2 + \varepsilon.$$

Завдання 1. У результаті проведення ПФЕ одержані результати, які зведені в таблицю:

x_0	x_1	x_2	y	S_{yi^2}	$gi-1$
+	-	-	2,5	$1,5 \cdot 10^{-2}$	10
+	-	+	-0,5	$3 \cdot 10^{-2}$	10
+	+	-	3,5	$1 \cdot 10^{-2}$	10
+	+	+	2,5	$2,5 \cdot 10^{-2}$	10

- а) оцінити коефіцієнти рівняння регресії;
- б) оцінити значущість коефіцієнтів;
- в) оцінити адекватність моделі.

$$y = d_0 + d_1 x_1 + d_2 x_2.$$

Вирішення:

Перш ніж приступити до розрахунку коефіцієнтів рівняння регресії, перевіримо гіпотезу про однорідність дисперсії відтворюваності в точках фактичного простору. Оскільки число повторних дослідів однакове, для перевірки однорідності використаємо критерій Кохрена. Обчислюємо розраховане значення критерія:

$$G_p = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=0}^{n-1} S_{yi}^2} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^{-2}} = 0,375.$$

За таблицями значень критерія Кохрена для рівня значущості $\alpha=0,05$ числа ступені свободи $g-1=10$ і числа точок факторного простору $N=4$ знаходимо критичні значення $G_{T1}=0,4884$,

Оскільки обчислене значення $G_p < G$, гіпотеза про однорідність дисперсії приймається.

Розрахуємо дисперсію відтворюваності експерименту, усереднюючи дисперсії відтворюваності дослідів.

$$S_0^2 = \frac{1}{4}(1,5 + 3 + 1 + 2,5)10^{-2} = 2 \cdot 10^{-2}$$

Тепер обчислюємо значення коефіцієнтів рівняння регресії за формулою

$$\hat{a}_i = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{ij} y_i$$

При цьому: $\hat{a}_0 = 2,0$; $\hat{a}_1 = 1,0$; $\hat{a}_2 = -1,0$.

Дисперсія оцінки коефіцієнтів \hat{a}_j дорівнює:

$$S_{aj}^2 = \frac{S_0^2}{2^n} = 0,5 \cdot 10^{-2}.$$

Звідки: $S_{aj} \cong 0,07$.

Переходимо до статистичного аналізу результатів обробки ПФЕ. Оцінимо значущість одержаних коефіцієнтів регресії.

Згідно з методикою введемо ймовірну величину:

$$T = \frac{\hat{a}_j - a_j}{S_{aj}},$$

розподілену за законом Ст'юдента:

$$f_0 = \sum_{j=0}^{n-1} (g_i - i) = 40.$$

Довірчий інтервал $2\varepsilon_j$ для \hat{a}_j обчислюємо так, щоб

$$P(\hat{a}_j - \varepsilon_{aj} < a_j < \hat{a}_j + \varepsilon_{aj}) = P\left(|a_j - \hat{a}_j| < \varepsilon_{aj}\right) = \gamma$$

Тепер, задаючись величиною довірчої ймовірності γ (наприклад $\gamma=0,95$), за таблицею розподілу Ст'юдента для одержаного значення числа ступенів свободи $f_0 = 40$, знайдемо значення t_{aj} для якого

$$P(T < t_{aj}) = \gamma.$$

При цьому $t_{aj} = 2,02$.

Тоді $\varepsilon_{aj} = S_{aj} t_{aj} = 0,07 \cdot 2,02 \approx 0,14$.

Звідки $a_j \in \left[\hat{a}_j - 0,14; \hat{a}_j + 0,14 \right]$.

При цьому $a_0 \in [1,86; 2,14]; a_1 \in [0,86; 1,14]; a_2 \in [-1,14; -0,86]$.

Оскільки не один з обчислених інтервалів не захоплює нуль, всі коефіцієнти рівняння регресії вважаємо значущими.

Тоді функція відклику має вигляд

$$\bar{y} = 2 + x_1 - x_2.$$

Оцінимо адекватність одержаної моделі. Розрахуємо дисперсію адекватності:

$$S_{ag}^2 = \frac{g}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (y_i - \sum_{j=0}^n a_j x_{ij})^2 = 11 \left[(2,5-2)^2 + (-0,5)^2 + (3,5-4)^2 + (2,5-2)^2 \right] = 11.$$

Тоді розраховане значення відношення Фішера

$$F_p = \frac{S_{ag}^2}{S_0^2} = \frac{11}{0,07} = 159,1$$

Далі за таблицею розподілу Фішера для рівня значущості $\alpha=0,05$ число ступенів свободи $f_{ag} = N - 1 = 1$ і $f = N(g - 1) = 40$ знаходимо $F_T = 4,08$. Оскільки $F_p > F_T$ гіпотезу про адекватність моделі необхідно відкинути.

Ймовірною причиною неадекватності моделі може бути неврахування взаємодії $x_1 x_2$.

Після введення цієї взаємодії в рівняння регресії воно одержує вигляд

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2.$$

Внаслідок однієї наявності матриці планування оцінювання коефіцієнтів рівняння регресії виконуємо незалежно один від одного. Тому

$$\hat{a}_3 = \frac{1}{4} (2,5 + 0,5 - 3,5 + 2,5) = 0,5.$$

Тепер рівняння регресії запишемо наступним чином:

$$y = 2 + x_1 - x_2 + 0,5 x_1 x_2.$$

Видно, що при цьому одержані в експерименті й обчислені згідно з рівняння регресії значення співпадають і таким чином скоригована модель адекватна.

Завдання 2. Для оцінки ефективності передачі даних залежно від бачності передачі - V, середньої частини дубльованої частини повідомлень - Н і відношення сигнал/шум - g був проведений ряд експериментів. Обробку їх результатів проводили з використанням штучної

ортогоналізації результатів. При цьому оцінки за МНК коефіцієнтів гіперплощин, які описують поведінку функції в кожній з підобластей ортокермованого три факторного простору, дали такі результати.

Як функцію відклику використовуємо співвідношення

$$Y=(V.H.g)=-\ln P(V.H.g),$$

де $P(V.H.g)$ – ймовірність успішної передачі повідомлення для заданих значень $V.H.g$.

Коваріаційна матриця помилок оцінок коефіцієнтів гіперплощин має вигляд

$$\hat{J} = G_i^2 \hat{I}.$$

Необхідно описати залежність ймовірності успішної передачі повідомлення від $V.H.g$, розрахувати ймовірність успішної передачі для найкращих, найгірших середніх умов передачі повідомлень.

		Y	H	g	$a_0^{(i)}$	$a_V^{(i)}$	$a_H^{(i)}$	$a_g^{(i)}$	g_i	σ_i^2
E_0	+	-	-	-	0.65	0.05	-0.20	-0.40	10	$1.95 \cdot 10^{-4}$
E_1	+	-	-	+	0.75	0.04	-0.15	-0.35	12	$2.05 \cdot 10^{-4}$
E_2	+	-	+	-	0.73	0.05	-0.20	-0.37	11	$2.1 \cdot 10^{-4}$
E_3	+	-	+	+	0.70	0.01	-0.25	-0.30	13	$2.0 \cdot 10^{-4}$
E_4	+	+	-	-	0.72	0.06	-0.25	-0.35	9	$2.0 \cdot 10^{-4}$
E_5	+	+	-	+	0.80	0.04	-0.15	-0.40	10	$2.05 \cdot 10^{-4}$
E_6	+	+	+	-	0.85	0.04	-0.20	-0.35	12	$1.95 \cdot 10^{-4}$
E_7	+	+	+	+	0.70	0.02	-0.20	-0.20	11	$1.9 \cdot 10^{-4}$

Вирішення:

Для опису функції відклику використаємо рівняння регресії

$$Y(V.H.g)=b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_1x_2+b_5x_1x_3+b_6x_2x_3+b_7x_1x_2x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2V - V_{\max} - V_{\min}}{V_{\max} - V_{\min}} & x_1 &\in [-1.1] \\ x_2 &= \frac{2H - H_{\max} - H_{\min}}{H_{\max} - H_{\min}} & x_2 &\in [-1.1]; \\ x_3 &= \frac{2g - g_{\max} - g_{\min}}{g_{\max} - g_{\min}} & x_3 &\in [-1.1] \end{aligned} \quad (7.1)$$

Оцінювання коефіцієнтів регресії (7.1) проведемо з використанням результатів ПФЕ, що формуються за методом штучної ортогоналізації. Згідно з методом за частковим описом функцій відклику в підобластях $E_0, E_1 \dots E_7$ обчислимо оцінки функції відклику в ортогональних точках і відповідні дисперсії:

$$\begin{aligned}
y_0 &= a_0^{(0)} + a_1^{(0)}x_1^{(0)} + a_2^{(0)}x_2^{(0)} + a_3^{(0)}x_3^{(0)} = 0.65 - 0.05 + 0.2 + 0.4 = 1.2; \\
y_1 &= a_0^{(1)} + a_1^{(1)}x_1^{(1)} + a_2^{(1)}x_2^{(1)} + a_3^{(1)}x_3^{(1)} = 0.75 - 0.04 + 0.15 - 0.35 = 0.51; \\
y_2 &= a_0^{(2)} + a_1^{(2)}x_1^{(2)} + a_2^{(2)}x_2^{(2)} + a_3^{(2)}x_3^{(2)} = 0.73 - 0.05 - 0.2 + 0.37 = 0.85; \\
y_3 &= a_0^{(3)} + a_1^{(3)}x_1^{(3)} + a_2^{(3)}x_2^{(3)} + a_3^{(3)}x_3^{(3)} = 0.7 - 0.01 - 0.25 - 0.30 = 0.14; \\
y_4 &= a_0^{(4)} + a_1^{(4)}x_1^{(4)} + a_2^{(4)}x_2^{(4)} + a_3^{(4)}x_3^{(4)} = 0.72 + 0.06 + 0.25 + 0.35 = 1.38; \\
y_5 &= a_0^{(5)} + a_1^{(5)}x_1^{(5)} + a_2^{(5)}x_2^{(5)} + a_3^{(5)}x_3^{(5)} = 0.8 + 0.04 + 0.15 - 0.4 = 0.59; \\
y_6 &= a_0^{(6)} + a_1^{(6)}x_1^{(6)} + a_2^{(6)}x_2^{(6)} + a_3^{(6)}x_3^{(6)} = 0.85 + 0.04 - 0.2 + 0.35 = 1.04; \\
y_7 &= a_0^{(7)} + a_1^{(7)}x_1^{(7)} + a_2^{(7)}x_2^{(7)} + a_3^{(7)}x_3^{(7)} = 0.7 + 0.02 - 0.2 - 0.3 = 0.22;
\end{aligned}$$

Дисперсії оцінки y_i в ортогональних точках знайдемо за формулою

$$D_{y_i} = \sigma_{d_0(i)}^2 + (x_1^{(i)})^2 \sigma_{d_1(i)}^2 + (x_2^{(i)})^2 \sigma_{d_2(i)}^2 + (x_3^{(i)})^2 \sigma_{d_3(i)}^2 = 4\sigma_{li}^2.$$

№п/п	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	y	$S_{y_i}^2$	$g_i - 1$
0	+	-	-	-	+	+	+	-	1,20	$7,8 \cdot 10^{-2}$	9
1	+	-	-	+	+	-	-	+	0,51	$8,2 \cdot 10^{-2}$	11
2	+	-	+	-	-	+	-	+	0,85	$8,4 \cdot 10^{-2}$	10
3	+	-	+	+	-	-	+	-	0,14	$8,0 \cdot 10^{-2}$	12
4	+	+	-	-	-	-	+	+	1,38	$8,0 \cdot 10^{-2}$	8
5	+	+	-	+	-	+	-	-	0,59	$8,2 \cdot 10^{-2}$	9
6	+	+	+	-	+	-	-	-	1,04	$7,8 \cdot 10^{-2}$	11
7	+	+	+	+	+	+	+	+	0,22	$7,6 \cdot 10^{-2}$	10

Перевіримо гіпотезу про однорідність дисперсій. Тому що $g_i \neq g$, використаємо критерій Фішера:

$$S_{\max}^2 = 4.4 \cdot 10^{-4}; \quad S_{\min}^2 = 3.6 \cdot 10^{-4};$$

$$F = \frac{S_{\max}^2}{S_{\min}^2} = \frac{4.4 \cdot 10^{-4}}{3.6 \cdot 10^{-4}} = 1.22.$$

За таблицею розподілу Фішера виберемо F_m , задавши $\alpha = 0.05$, $f_{i1} = 10$, $f_{i2} = 10$, При цьому $F_T = 2.98$. Оскільки $F < F_m$, то немає підстав для відхилення гіпотези H_0 про те, що дисперсії однорідні.

Обчислимо тепер дисперсію відтворюваності експерименту

$$S_0^2 = \frac{\sum_{i=0}^7 (g_i - 1) s_{y_i}^2}{\sum_{i=0}^7 (g_i - 1)} = \frac{10^{-4} \frac{7.8*9 + 8.2*11 + 8.4*10 + 8.0*12 + 8.0*8 + 8.2*9 + 7.8*11 + 7.6*10}{9+11+10+12+8+9+11+10}}{10^{-4} * \frac{1}{80} (7.8*20 + 8.2*20 + (8.4+7.6)*10 + 8.0*20)} = 8.0 * 10^{-4}.$$

Згідно з методикою обробки результатів ПФЕ маємо:

$$\hat{a}_j = \frac{1}{8} \sum_{i=0}^7 Z_{ij} y_i \quad (7.2)$$

де Z_{ij} - значення j-го фактора в i-му експерименті.

У результаті підрахунку за формулою (7.2) одержимо:

$$\begin{aligned} \hat{b}_0 &= 0.74125, & \hat{b}_4 &= 1.25 * 10^{-3}, \\ \hat{b}_1 &= 0.06625, & \hat{b}_5 &= -2.265 * 10^{-2}, \\ \hat{b}_2 &= -0.17875, & \hat{b}_6 &= 6.25 * 10^{-3}, \\ \hat{b}_3 &= -0.37625, & \hat{b}_7 &= 1.25 * 10^{-3}. \end{aligned}$$

Дисперсії оцінки коефіцієнтів \hat{a}_j визначаються співвідношенням

$$S_{aj}^{2n} = \frac{S_0^2}{2^n} = \frac{8 * 10^{-4}}{8} = 10^{-4}, \quad j=0,1,\dots,7$$

Звідси $S_{aj}^n = 0.01$, $j=0,1,\dots,7$

Оцінимо значущість коефіцієнтів функції відклику. Введемо випадкову величину

$$T_j = \frac{\left| \hat{a}_j - a_j \right|}{S_{aj}^n},$$

Розподілену за законом Ст'юдента з $f_0 = \sum_{i=0}^7 (g_i - 1) = 80$ ступенями свободи.

Виберемо тепер величину ε_{aj} так, що $P\left(\left| \hat{a}_j - a_j \right| < \varepsilon_{aj}\right) = \gamma$. Тоді маємо

$$P\left(\frac{\left| \hat{a}_j - a_j \right|}{S_{aj}^n} < \frac{\varepsilon_{bj}}{S_{bj}^n}\right) = P\left(T_i < \frac{\varepsilon_{bi}}{S_{bi}^n}\right) = \gamma.$$

Використаємо таблиці t-розподілу, знаходимо для ($f_0 = 80$, $\alpha = 1 - \gamma = 0.05$) таке число $t_{aj} = 1.99$, для якого нерівність $T_j < t_{aj}$ виконується із заданою ймовірністю. Тоді

$$\left| \hat{b}_i - b_i \right| < S_{\hat{b}^i} t_{bi} = 0.01 * 1.99 \approx 0.02 \quad j=0.1 \dots 7,$$

$$\hat{b}_i - S_{\hat{b}^j} t_{bj} < b_j < \hat{b}_i + S_{\hat{b}^j} t_{bj} \quad j=0.1 \dots 7,$$

$$\text{В нашому випадку } \hat{b}_i - 0.02 < b_j < \hat{b}_i + 0.02 \quad j=0.1 \dots 7.$$

Таким чином, довірчий інтервал, який накладає із заданою ймовірністю ($j=0.95$) істинне значення коефіцієнта b_j рівняння регресії дорівнює $[b_j - 0.02; b_j + 0.02]$ $j=0.2 \dots 7$. Будемо вважати, що коефіцієнт b_j значущий, якщо відповідний довірчий інтервал захоплює нуль, тобто якщо $|b_j| > S_{\hat{b}^j} t_{bj} = 0.02$. У протилежному разі цей коефіцієнт необхідно визнати незначним. У розглянутому прикладі коефіцієнти d_4 , b_6 і b_7 мають числове значення менше 10^{-2} , тому вважаємо їх незначними.

Таким чином, функція відклику має вигляд $y(v, h, q) = 0.74125 + 0.06625x_1 - 0.17875x_2 - 0.37625x_3 - 0.02625x_1x_3$.

Розрахуємо дисперсію адекватності:

$$\begin{aligned} S_{ad}^2 &= \frac{1}{N-l} \sum_{i=0}^7 q_i \left(\bar{Y}_i - \sum_{j=0}^n b_j x_{ij} \right)^2 = \frac{1}{8-5} [10(1.2 - 1.20375)^2 + \\ &+ 12(0.51 - 0.50375)^2 + 11(0.85 - 0.84625)^2 + 13(0.14 - 0.14625)^2 + \\ &+ 9(1.38 - 1.38875)^2 + 10(0.59 - 0.58375)^2 + 12(1.04 - 1.03125)^2 + \\ &+ 11(0.22 - 0.22625)^2 = \frac{1}{3} [1.40625 * 10^{-4} + 4.6875 * 10^{-4} + \\ &+ 1.546875 * 10^{-4} + 5.078125 * 10^{-4} + 6.890625 * 10^{-4} + \\ &+ 3.90625 * 10^{-4} + 9.1875 * 10^{-4} + 4.296875 * 10^{-4}] = \frac{1}{3} * 3.7 * 10^{-3} = 1.23 * 10^{-3}. \end{aligned}$$

Для оцінки адекватності використаємо критерій Фішера:

$$F = \frac{S_{aq}^2}{S_0^2} = \frac{1.23 * 10^{-3}}{4.0 * 10^{-4}} = 1.85; \quad F_t \cong 2.7 \quad (\text{при рівні значущості } \alpha=0.05,$$

$$f_{aq} = N - 1 = 3, f_0 = \bar{z}(q_i - 1) = 80$$

Отже, модель адекватна. При цьому $P(v, h, q) = e^{-y(v, h, q)}$.

Розрахуємо ймовірність успішної передачі для найкращих умов

$$x_1 = 1(v_{\min}), x_2 = 1(H_{\max}), x_3 = 1(q_{\max}).$$

Тоді

$$\begin{aligned} P_{\max} &= \exp \{ [0.74125 - 0.06525 - 0.17825 - 0.37625 + 0.02625] \} = \\ &= e^{-0.14625} \cong 0.864 \end{aligned}$$

У найгірших умовах передачі: $x_1=1(v_{\max})$, $x_2=1(H_{\min})$, $x_3=1(q_{\min})$.

Тоді:

$$P_{\min} = \exp \left\{ - \left[0.74125 - 0.06625 + 0.17875 + 0.37625 + 0.02625 \right] \right\} = e^{-1.38875} \cong 0.25.$$

Нарешті для середніх умов передачі повідомлень $x_1=x_2=x_3=0$

$(V_{\text{ср}}, H_{\text{ср}}, q_{\text{ср}})$.

Тоді: $P = \exp \{ -0.74125 \} \cong 0.477$.

Завдання 3. Побудувати кумулятивну криву і гістограму для наведених в таблиці 1 результатів багаторазових спостережень величини X . Розрахувати точкові оцінки характеристик положень (середнє арифметичне, медіана, середнє арифметичне границь варіаційного ряду), розсіяння (дисперсія і середнє квадратичне відхилення результатів спостережень і вимірювання) асиметрії і гостровершинності.

Таблиця 1. - Результати спостережень

2,25	4,07	4,50	4,89	5,22	5,55	5,97	6,44
3,24	4,16	4,58	4,96	5,29	5,61	6,07	6,63
3,52	4,24	4,67	5,02	5,35	5,69	6,16	6,92
3,81	4,33	4,75	5,09	5,42	5,79	6,25	7,20
3,99	4,41	4,83	5,15	5,48	5,88	6,36	8,19

Вирішення:

1. Розташуємо результати спостережень x_i в порядку зростання і запишемо їх в табл.

2.

2. Взявши з таблиці мінімальне і максимальне значення x_i визначимо діапазон $\Delta X = x_n - x_1 = 8.19 - 2.25 = 5.94$.

3. Розіб'ємо цей діапазон на $L=7$ інтервалів шириною

$$\Delta X = \frac{\Delta X}{L} = \frac{5.94}{7} = 0.8486.$$

Визначимо границі інтервалів $x_{\min j}$ і $x_{\max j}$ і їх середини $x_{\text{ср} j}$ за формулами $x_{\min 1} = x_1$,

$$x_{\max j} = x_{\min j} + \Delta x, \quad x_{\text{ср} j} = \frac{x_{\max j} + x_{\min j}}{2} \text{ і запишемо їх в табл. 3.}$$

Відмітимо границі інтервалів горизонтальними рисами в табл. 2.

4. Підрахуємо кількість m_j результатів спостережень, які потрапили в кожний інтервал j і занесені в табл. 2.

5. Побудуємо гістограму у вигляді стовпців шириною Δx і висотою m_j (рис.7.1)

Таблиця 2. - До побудови емпіричних законів розподілу

i	x_i	m_i	F_i
1	2.25	1	0.025
2	3.24	3	0.1
3	3.52		
4	3.81		
5	3.99	10	0.35
6	4.07		
7	4.16		
8	4.24		
9	4.33		
10	4.41		
11	4.50		
12	4.58		
13	4.67		
14	4.75		
15	4.83	13	0.7
16	4.89		
17	4.96		
18	5.02		
19	5.09		
20	5.15		
21	5.22		
22	5.29		
23	5.35		
24	5.42		
25	5.48		
26	5.55		
27	5.61		
28	5.69	9	0.925
29	5.79		
30	5.88		
31	5.97		
32	6.07		
33	6.16		
34	6.25		
35	6.36		
36	6.44		
37	6.63	3	0.975
38	6.92		
39	7.20		
40	8.19	1	1

6. Визначимо, що результати спостережень x_c будуть менше, ніж границі інтервалів

$x_{гp j}$:

$$A_0 = 3(\chi_0 B \chi_{гp 0}) \text{ де } x_{гp j} = x_{\max j} = x_{\min(j+1)}.$$

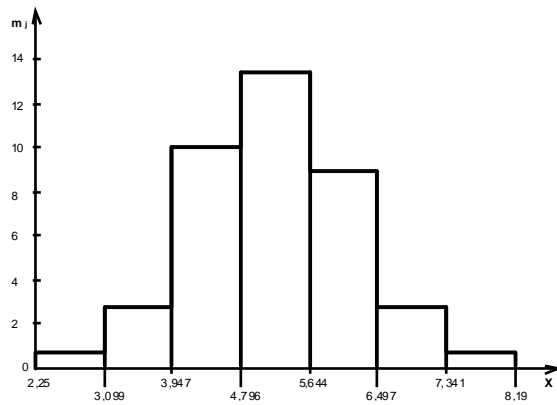


Рис.7.1 - Гістограма

Таблиця 3. - Границі інтервалів і їх середини

j	$x_{\min j}$	$x_{\max j}$	$x_{\text{ср } j}$
1	2.25	3.099	2.6745
2	3.099	3.947	3.5230
3	3.947	4.796	4.3715
4	4.796	5.644	5.2200
5	5.644	6.493	6.0685
6	6.493	7.341	6.9170
7	7.341	8.19	7.7655

$$F_0 = 0;$$

$$F_1 = \frac{m_1}{n};$$

$$F_2 = \frac{m_1 + m_2}{n};$$

.....

$$F_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k m_j;$$

$$F_L = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^L m_j = 1$$

Для даного прикладу: $F_0=0$; $F_1=0.025$; $F_2=0.1$; $F_3=0.35$; $F_4=0.7$; $F_5=0.925$;

$F_6=0.975$; $F_7=1$

Одержані значення занесемо в табл. 2.

7. Побудуємо кумулятивну криву для заданих експериментальних даних (рис.7.2)

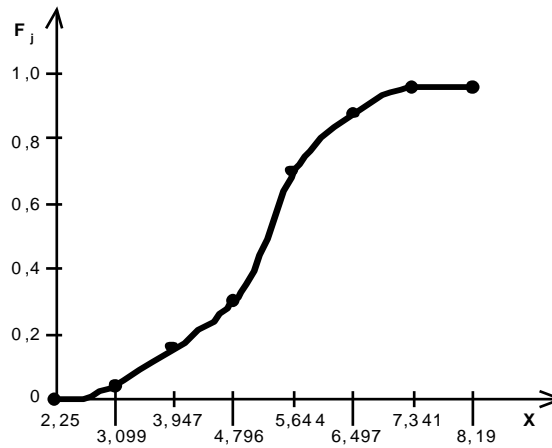


Рис.7.2 - Кумулятивна крива

8. Визначимо точкові оцінки одержаних розподілів експериментальних даних:

1) середнє арифметичне $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 x_i = 5.19825$

2) середнє арифметичне границі варіаційного ряду

$$x_{cp} = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2} = 5.22;$$

3) медіана $N_e = \frac{x_{20} + x_{21}}{2} = \frac{5.15 + 5.22}{2} = 5.185;$

4) оцінка дисперсії результату спостереження

$$D_x = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{40} (x_i - \bar{x})^2 = 1.30304;$$

5) оцінка СКВ результату спостережень

$$\hat{\sigma}_x = +\sqrt{\hat{D}_x} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 1.1415$$

6) оцінка СВВ результату вимірювань (середнього арифметичного)

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}} = 0.18049$$

7) оцінка асиметрії $\hat{A} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n \hat{\sigma}_x^3} = 0.0419$

8) оцінка епсциса $\hat{E} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{n \hat{\sigma}_x^4} - 3 = 0.327.$

Завдання.4. Побудувати композицію заданих в табл. 1 законів розподілу суми трьох складових похибки

$$X=X_1+X_2+X_3,$$

знайти оцінки її математичного очікування і дисперсії.

Таблиця 1 - Закони розподілу складових похибки

Номер закона	Параметр	Номер інтервалу в законі розподілу				
		1	2	3	4	5
1	$P_1(x)$	3,0	1,4	1,2	1,4	3,0
	x	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6
2	$P_2(x)$	1,25	3,75	3,75	1,25	-
	x	2,5	2,6	2,7	2,8	-
3	$P_3(x)$	2,5	2,5	2,5	2,5	-
	x	5,2	5,3	5,4	5,5	-

Вирішення:

1. Побудуємо гістограми законів розподілу (рис.7.3), враховуючи, що значення (x) відповідають серединам стовпців гістограми, а $P_{(x)}$ - їх висотам. На рис.7.3 показано, що перший розподіл можна віднести до розподілів виду арксинус, другий - до трикутника, а третій - до рівномірного.

Ширина інтервалів для всіх гістограм Δx дорівнює 0,1.

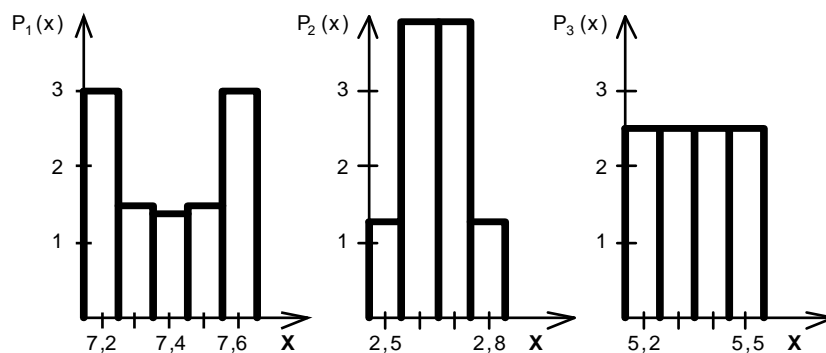


Рис.7.3 - Гістограми заданих законів розподілу

2. Виконуємо композицію двох законів розподілу, для чого представимо їх у вигляді верхньої стрічки і лівого стовпця табл. 2.

3. Після заповнення табл. 2 виконуємо підсумовування добутків $P_1(x) \cdot P_2(x)$, які мають однакові суми аргументів $x_1 + x_2$ (що лежать на одній діагоналі табл. 2).

Таблиця 2 - Побудова композиції перших двох законів розподілу

$P_2(x) \backslash P_1(x)$	3,0/7,2	1,4/7,3	1,2/7,4	1,4/7,5	3,0/7,6
1,25/2,5	3,75/9,7	1,75/9,8	1,5/9,9	1,75/10,0	3,75/10,1
3,75/2,6	11,25/9,8	5,25/9,9	4,5/10,0	5,25/10,1	11,25/10,2
3,75/2,7	11,25/9,9	5,25/10,0	4,5/10,1	5,25/10,2	11,25/10,3
1,25/2,8	3,75/10,0	1,75/10,1	1,5/10,2	1,75/10,3	3,75/10,4

Перемноживши одержані суми на $\Delta x=0,1$, одержуємо композицію перших двох законів розподілу (верхній рядок в табл. 3). Гістограма одержаного розподілу зображена на рис.7.4.

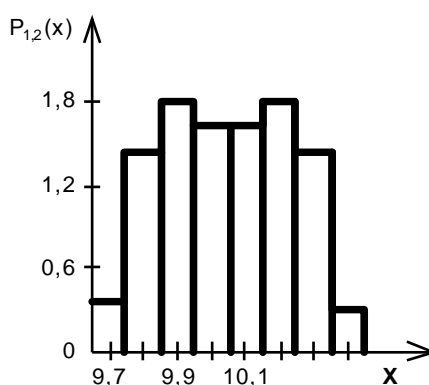


Рис.7.4 - Гістограма композиції двох перших законів розподілу

4. Додаємо до одержаного дискретного закону розподілу третій закон розподілу у вигляді лівого стовпця табл. 3 і, заповнюючи таблицю також, як і 2, одержуємо композицію трьох законів розподілу (табл.4), гістограма якої наведена на рис.7.5.

Таблиця 3. - Побудова композиції трьох законів розподілу

$P_3(x) \backslash P_{1,2}(x)$	0,375/9,7	1,3/9,8	1,8/9,9	1,525/10,0	1,525/10,1	1,8/10,2	1,3/10,3	0,375/10,4
2,5/5,2	0,9375/14,9	3,25/15,0	4,5/15,1	3,8125/15,2	3,8125/15,3	4,5/15,4	3,25/15,5	0,9375/15,6
2,5/5,3	0,9375/15,0	3,25/15,1	4,5/15,2	3,8125/15,3	3,8125/15,4	4,5/15,5	3,25/15,6	0,9375/15,7
2,5/	0,9375/15,1	3,25/15,2	4,5/15,3	3,8125/15,4	3,8125/15,5	4,5/15,6	3,25/15,7	0,9375/15,8
2,5/5,5	0,9375/15,2	3,25/15,3	4,5/15,4	3,8125/15,5	3,8125/15,6	4,5/15,7	3,25/15,8	0,9375/15,9

Таблиця 4. - Композиція трьох законів розподілу

$P_{1,2,3}(x)$	0,09735	0,41875	0,86875	1,25	1,5375	1,6625
x	14,9	15,0	15,1	15,2	15,3	15,4
$P_{1,2,3}(x)$	1,5375	1,25	0,86875	0,41875	0,09735	-
x	15,5	15,6	15,7	15,8	15,9	-

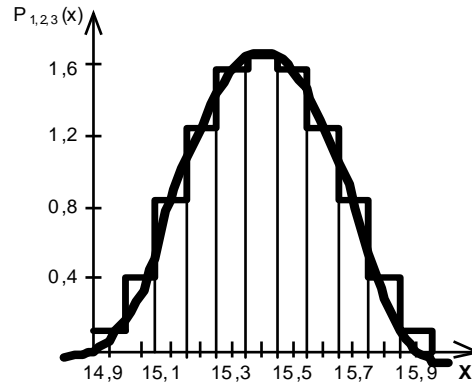


Рис.7.5 - Гістограма трьох законів розподілу

5. З рис.7.5 бачимо, що одержаний закон розподілу за формою близький до нормального. Оцінки математичного очікування \hat{M}_x і дисперсії \hat{D}_x для цього розподілу розраховуємо за формулами

$$\hat{M} = \hat{M}_1 + \hat{M}_2,$$

$$\hat{D} = \hat{D}_1 + \hat{D}_2.$$

$$\hat{M}_x = 15,4; \hat{D}_x = 0,047.$$

Завдання 5. Визначити результат вимірювання і границі його похибки для заданих нижче (табл.1) спостережень, коли відомо, що спостереження у групах розподілені за одним і тим же законом. Довірча ймовірність $D_d=0,95$.

Таблиця 1. - Дві групи спостережень

X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2
21,582	20,585	20,987	20,982	20,683	21,749	21,277	21,743
21,515	20,595	20,855	21,143	20,750	21,836	21,409	21,615
21,410	20,641	20,751	21,311	20,854	21,882	21,514	21,458
21,279	20,724	20,684	21,476	20,986	21,881	21,581	21,285
21,133	20,840	20,660	21,625	21,131	21,834	21,605	21,108

Вирішення:

1. Визначаємо середні арифметичні значення для кожної групи:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} = 21,132;$$

$$x_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i} = 21,316.$$

2. Знаходимо модуль різниці одержаних середніх арифметичних:

$$G = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = 0.184.$$

3. Визначаємо оцінку дисперсії результатів спостережень в кожній із груп.

$$\hat{D}_1 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (\bar{x}_1 - x_{1i})^2 = 0.117,$$

$$\hat{D}_2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (\bar{x}_2 - x_{2i})^2 = 0.2123$$

4. Розраховуємо сумарну оцінку дисперсії результатів вимірювання груп:

$$\hat{D} = \frac{\hat{D}_1}{n_1} + \frac{\hat{D}_2}{n_2} = \frac{0.1115 + 0.2123}{20} = 0.01619.$$

5. За заданою довірчою ймовірністю $P_d=0,95$, враховуючи закон розподілу модуля різниці середніх арифметичних значень груп нормальним (бо $n_1+n_2=40>30$), визначаємо за таблицею (залежності довірчого коефіцієнта $t_p(P_d)$ для різних законів розподілу): $t_p=1.96$, після чого виконуємо порівняння $t_p \sqrt{\hat{D}} = 0.254$ і G . Оскільки $0,184 < 0,254$, то відхилення середніх арифметичних груп вважаємо несуттєвим і переходимо до перевірки груп на рівно розсіяність (рівноточність).

Для перевірки рівнорозсіяності вимірювань у групах скористаємося виразами.

1. За обчисленими значеннями \hat{D}_1 і \hat{D}_2 визначаємо величину

$$\psi = \frac{\hat{D}_1}{\hat{D}_2} = 1.904 > 1,$$

2. За заданою довірчою ймовірністю $P_d=0,95$, за таблицею розподілу Фішера для $n_1=n_2=20$ знаходимо значення параметра $\psi_0=2,17$.

3. Виконуємо порівняння ψ і ψ_0 . Оскільки $1,904 < 2,17$ серії вимірювань можна вважати рівнорозсіяними.

Оцінку математичного очікування результатів спостережень для об'єднання груп визначаємо так:

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{21.132 + 21.316}{2} = 21.224.$$

Оцінку дисперсії результату вимірювання описуємо за

$$\begin{aligned} \hat{D}_x &= \frac{1}{(n_1 + n_2) * (n_1 + n_2 - 1)} [\hat{D}_1 (n_1 - 1) + \hat{D}_2 (n_2 - 1) + (\bar{x} - \bar{x}_1)^2 * n_1 + (\bar{x} - \bar{x}_2)^2 * n_2] = \\ &= \frac{1}{40 * 39} [0.117 * 19 + 0.2123 * 19 + (21.224 - 21.132)^2 * 20 + (21.224 - 21.316)^2 * 20] = \\ &= 0.0042 \end{aligned}$$

Границі похибки результату вимірювання знаходимо за формулою

$$E_{\bar{x}} = t_p \sqrt{\hat{D}_{\bar{x}}}$$

де $t_p=1.96$.

Результат вимірювання остаточно запишемо $21,224 \pm 0,127$, $P_d=0,95$.

Завдання 6. Визначити результатам опосередкованих вимірювань величини $X=0,3X_1 + 0,01X_2$ і границі його похибки для наведених в табл. 1 результатів багатократних вимірювань X_1 і X_2 . З урахуванням кореляції ними. Довірча ймовірність $P_d = 0,95$.

X_1	X_2	X_3	X_4
21,582	20,585	20,683	21,749
21,515	20,595	20,750	21,836
21,410	20,641	20,854	21,882
21,279	20,724	20,986	21,881
21,133	20,840	21,131	21,834
20,987	20,982	21,277	21,743
20,855	21,143	21,409	21,615
20,751	21,311	21,514	21,458
20,684	21,476	21,581	21,285
20,660	21,625	21,605	21,108

Вирішення:

1. Визначаємо середні арифметичні аргументів рівняння вимірювання:

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} X_{i1} = 21,1323.$$

2. Знаходимо оцінки дисперсії результатів спостереження аргументів:

$$\hat{D}(x_1) = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 = 0,11735,$$

$$\hat{D}(x_2) = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 = 0,21323.$$

і оцінки дисперсії результатів їх вимірювання:

$$\hat{D}(\bar{x}_1) = \frac{1}{20} \hat{D}(x_1) = 0,00386, \quad \hat{D}(\bar{x}_2) = \frac{1}{20} \hat{D}(x_2) = 0,01066.$$

2. Розраховуємо значення коефіцієнтів впливу:

$$W_1 = \frac{\partial X}{\partial x_1} = 0,3e^{0,01\bar{x}_2} = 0,37127;$$

$$W_2 = \frac{\partial X}{\partial x_2} = 0,003\bar{x}_1 e^{0,01\bar{x}_2} = 0,078458;$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial x_2^2} = 0,003 * 0,01 * \bar{x}_1 e^{0,01\bar{x}_2} = 0,00078458;$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,003e^{0,01\bar{x}_2} = 0,00037127.$$

4. Порівнюємо можливість застосування формули для оцінки границь похибки:

$$R_0 < 0,8\sqrt{W_1^2 \hat{D}(x_1) + W_2^2 \hat{D}(\bar{x}_2)} = 0,0237,$$

де

$$R_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} \Delta^2 x_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial x_2^2} \Delta^2 x_2 + \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 = 6,8 * 10^{-4}$$

для

$$\Delta x_1 = \max(\bar{x}_1 - x_1 i) = 0,4727$$

$$\text{і} \quad \Delta x_2 = \max(\bar{x}_2 - x_2 i) = 0,73065.$$

Оскільки нерівність виконується, поляризація можлива.

5. Розраховуємо оцінку кореляційного моменту:

$$E_{1,2} = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (x_1 i - \bar{x}_1)(x_2 i - \bar{x}_2) = -0,08138.$$

6. Розраховуємо коефіцієнт кореляції:

$$r_{1,2} = \frac{K_{1,2}}{G_{x1} G_{x2}} = -0,51446, -1 < r_{1,2} < 1.$$

7. Перевіряємо наявність кореляції між x_1 і x_2 за формулою

$$\frac{|r_{1,2}|}{\sqrt{1-r_{1,2}^2}} \sqrt{n-2} < t_s,$$

де t_s знаходимо за таблицею розподілу. Для ймовірності $P_d = 0,95$ і низки спостережень $n-2=18$, $t_s=2,11$.

Оскільки $2,54 > 2,11$, тобто нерівність не виконується, то маємо кореляційний зв'язок x_1 і x_2 .

8. Перевіряємо графічно наявність кореляції між x_1 і x_2 , для чого представимо залежність між x_2 і x_1 (рис.7.6)

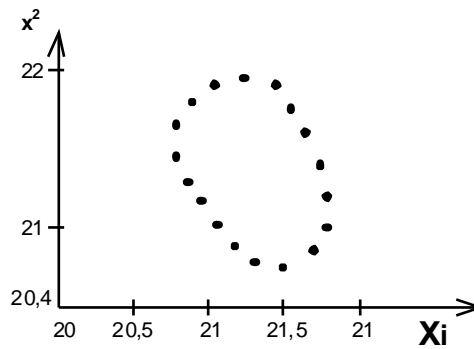


Рис.7.6 - Залежність x_2 (x_1)

З рисунку видно, що між x_1 і x_2 є кореляція, причому $r_{1,2} < 0$.

9. Результати вимірювання \bar{x} розраховуємо за формулою

$$\bar{x} = 0,3\bar{x}_1 e^{0,01\bar{x}_2} = 7,8458625.$$

10. Оцінка дисперсії результатами вимірювань буде дорівнювати

$$\hat{D}_{\bar{x}} = W_1^2 * \hat{D}(\bar{x}_1) + W_2^2 \hat{D}(\bar{x}_2) + 2W_1W_2r_{1,2}\sqrt{\hat{D}(\bar{x}_1)\hat{D}(\bar{x}_2)} = 8 * 8 * 10^{-2}.$$

11. Границі випадкової похибки результату опосередкованого вимірювання знаходимо за формулою

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \pm ts\sqrt{\hat{D}_{\bar{x}}}, \text{ де } ts - \text{ коефіцієнт Ст'юдента для ймовірності } 0,95 \text{ і число ступенів}$$

свободи $K_{\text{еф}}$ яке визначаємо за формулою

$$K_{\text{еф}} = \frac{(n+1)(W_1^2\hat{D}(\bar{x}_1) + W_2^2\hat{D}(\bar{x}_2))^2}{(W_1^4\hat{D}^2(\bar{x}_1) + W_2^4\hat{D}^2(\bar{x}_2))} - 2 \approx 23.$$

Для ймовірності $P_d=0,95$ і $K_{\text{еф}} \approx 23$ знайдемо із таблиці Ст'юдента значення $t_s=2$, тоді

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \pm 2\sqrt{8,8 * 10^{-3}} = \pm 0,19.$$

Завдання 7. При дослідженні пускорегулюючого пристрою одержані дані експерименту :

$t_i, \text{ c}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$I_i, \text{ A}$	100	75	55	40	30	20	15	10	10	5	5

t_i – час, i – струм.

Відповідно до теоретичних даних залежність струму від часу має вигляд

$$i = i_0 e^{-\alpha t},$$

де i_0 – початкова сила струму, $i_0=100\text{A}$; α – шуканий параметр, $\alpha = (r_b + r_p) / L_b$

На основі дослідних даних визначаємо в першому наближенні α . Відомо, що функція e^{-x} при $x=3$ досягає значення $\approx 0,05$. Тоді, як видно з експерименту, при $t=9-10\text{c}$ значення $i=0,05 i_0$, таким чином, α приблизно дорівнює $0,3 \text{ 1/e}$. Для уточнення α скористаємося

методом найменших квадратів. Задаємося кількома значеннями α , близькими до 0,3 1/с. Потім за формулою обчислюємо сили струму i_i в точках $t=t_i$. Згідно з цим обчислюємо значення суми квадратів відхилень

$$\sum_{i=1}^{10} (i_i - i_0 e^{-\alpha t_i})^2 = \sum^2 \text{ для різних } \alpha.$$

Оформляємо результати обчислень:

α 1/с	0,28 0,29 0,30 0,31 0,32 0,33
$\sum^2 A^2$	83,3 40,3 17,4 13,6 25,7 51,4

Будуємо графік функції $\sum^2 = \varphi(\alpha)$ (рис.7.7), знайдемо, що $\sum^2 = \min$ при $\alpha=0,307$.

Отже, найкращим наближення до дослідних даних є функція $i = 100e^{-0,307t}$. Графік цієї функції і експериментальні точки показані на рис.7.8.

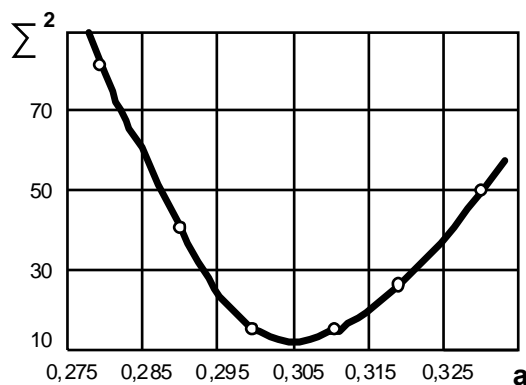


Рис.7.7

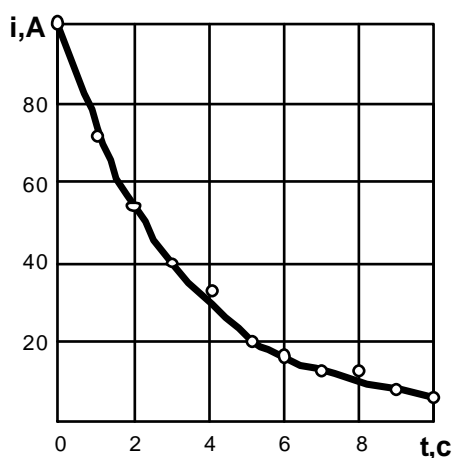


Рис.7.8

Завдання 8. Розглянемо результати експерименту щодо визначення статичної характеристики підсилювача:

i, mA	41	50	81	104	120	139	154	180	241	250	269	301
I, A	4	8	10	14	16	20	19	23	30	31	36	37

Виразимо залежність $I = f(i)$ лінійною залежністю: $I = d_0 + d_1 i$.

Тут I - сила струму завантаження; i - сила струму керування.

Для знаходження коефіцієнтів d_0 і d_1 скористаємося методом найменших квадратів:

$$\sum_{i=1}^N [I_i - (d_0 + d_1 i)]^2; N = 13$$

Візьмемо часткові похідні від \sum^2 за змінними d_0 і d_1 і прирівнявши їх до нуля, одержимо:

$$\begin{aligned} d_0 N + d_1 \sum_{i=1}^N i_i &= \sum_{i=1}^N I_i; \\ d_0 \sum_{i=1}^N i_i + d_1 \sum_{i=1}^N i_i^2 &= \sum_{i=1}^N I_i i_i. \end{aligned}$$

Вирішення системи дає значення спутаних коефіцієнтів.

Завдання 9. Для умов, указаних в попередньому завданні, перевірити адекватність одержаної залежності $I = 0,687 + 0,124i$ при дисперсії досліду $D_{I_0} = 0,8 \text{ A}^2$ і числі паралельних вимірювань в кожній точці $m=3$.

За даними експерименту обчислюємо дисперсію адекватності:

$$D_{I_d} = \frac{\sum_{i=1}^N (I_i - d_0 - d_1 i_i)^2}{N - S} = \frac{16.1}{13 - 2} = 1.46 \text{ A}^2.$$

Оскільки $D_{I_d} > D_{I_0}$ для оцінки адекватності знаходимо значення критерію Фішера:

$$F = \frac{D_{I_d}}{D_{I_0}} = \frac{1.46}{0.8} = 1.83.$$

Значення F_m встановлене за таблицею критерію Фішера, при ступенях свободи $r_1 = 13 - 2 = 11$ і $r_2 = 13 * (3 - 1) = 26$ дорівнює 2,19. Таким чином $F < F_m$ і знайдена залежність адекватно описує досліджуване явище.

У розглянутому випадку згідно з результатами експерименту

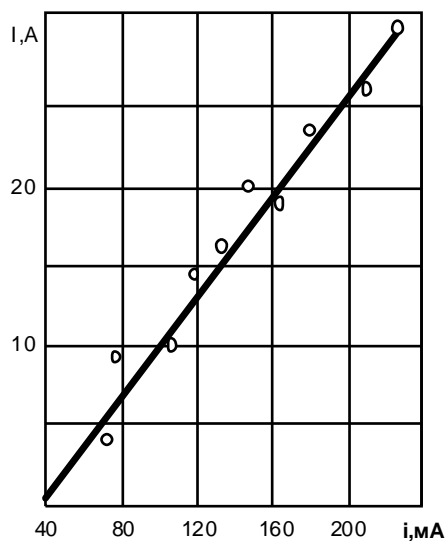


Рис.7.9

$$\sum_{i=1}^N i_i = 2138 \text{ mA}; \sum_{i=1}^N I_i = 274 \text{ A}; \sum_{i=1}^N i_i^2 = 438202 \text{ mA}^2; \sum_{i=1}^N I_i i_i = 55805 \text{ mA} \cdot \text{A}; N=B$$

Підставивши ці значення, одержимо $d_0=0.687\text{A}$ і $d_1=0.124 \text{ A/mA}$.

Тоді залежність $I = f(i)$ набуде вигляду $I=0,687+0,124i$.

Апроксимуюча пряма і експериментальні точки відображені на рис.7.9.

Додаток 1

Значення t -критерію Стюдента при 5%-му рівні значущості

f	$t_{0,05; f}$	f	$t_{0,05; f}$	f	$t_{0,05; f}$
1	12,71	11	2,201	21	2,080
2	4,303	12	2,179	22	2,074
3	3,182	13	2,160	23	2,069
4	2,776	14	2,145	24	2,064
5	2,571	15	2,131	25	2,060
6	2,447	16	2,120	26	2,056
7	2,365	17	2,110	27	2,052
8	2,306	18	2,101	28	2,048
9	2,262	19	1,093	29	2,045
10	2,228	20	2,086	30	2,042
				∞	1,960

Додаток 2

Значення t -критерію Стюдента при 1%-му рівні значущості

f	$t_{0,01; f}$	f	$t_{0,01; f}$	f	$t_{0,01; f}$
1	63,7	11	3,11	21	2,83
2	9,92	12	3,05	22	2,82
3	5,84	13	3,01	23	2,81
4	4,60	14	2,98	24	2,80
5	4,03	15	2,95	25	2,79
6	3,71	16	2,92	30	2,75
7	3,50	17	2,90	40	2,70
8	3,36	18	2,88	60	2,66
9	3,25	19	2,86	100	2,63
10	3,17	20	2,85	200	2,60
				∞	2,59

Значення F -критерію Фішера при 5%-му рівні значущості

f_1	f_2								
	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,4
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,9
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
28	4,2	3,3	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Значення F -критерію Фішера при 1 %-му рівні значущості

f_1	f_2							
	1	2	3	4	5	6	12	24
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	6106	6235
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,42	99,46
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,05	26,60
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,37	13,93
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,97	9,89	9,47
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	7,72	7,31
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,47	6,07
8	11,26	8,65	7,59	6,01	6,63	6,37	5,67	5,28
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,11	4,73
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,66	5,39	4,71	4,33
11	9,65	7,21	6,22	4,67	5,32	5,07	4,40	4,02
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,16	3,78
13	9,07	6,7	5,74	5,21	4,86	4,62	3,96	3,59
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,70	4,46	3,80	3,43
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	3,67	3,29
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,55	3,18
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,46	3,08
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,24	4,01	3,37	3,00
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,30	2,92
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,23	2,86
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,12	2,75
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,99	3,67	3,03	2,66
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	2,84	2,47
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,66	2,29
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,50	2,12
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,37	1,98

**Таблиця номінальних значень найпоширеніших факторів впливу
та їх меж для нормальних умов застосування засобів
вимірювальної техніки**

Фактор впливу	Номінальні значення (допустимі як номінальні)	Допуск	
		Характеристика допуску	Межі допуску
Температура, К; °С	293 К; 20°C (273 К; 90 К; 4,2 К) (23°C; 25°C; 27°C)	Середнє відхилення від номінального значення	±0,01°C; ±0,02°C; ±0,05°C; ±0,1°C; ±0,2°C; ±0,5°C; ±1°C; ±2°C; ±5°C; ±10°C; ±15°C;
		Коливання в процесі вимірювання за нормований час	0,001; 0,002; 0,005; 1; 2; 5; 10
		Різниця в робочому просторі і на поверхні засобу вимірювання	0,01; 0,02; 0,05; 1; 2; 5; 10
Атмосферний тиск, кПа; Па; мм рт. ст.	101,3 кПа, (101325 Па) 760 мм рт.ст. (750 мм рт.ст.)	Відхилення від номінального значення	±3; ±4; ±6; ±8; ±10 (кПа); ±25; ±30; ±45; ±60; ±75 (мм рт.ст.)
		Межі для неустановленого номінального значення	84-106; 87-107; 96-104; 98-105 (кПа); 630-795; 652-802; 720-780; 735-790 (мм рт. ст.)
Відносна вологість, %	60% (55; 58; 65%)	Відхилення від номінального значення	±1; ±2; ±5; ±10; ±15; ±20
		Межі для неустановленого номінального значення	30-60; 30-80; 45-80

Фактор впливу	Номинальні значення (допустимі як номінальні)	Допуск	
		Характеристика допуску	Межі допуску
Вібрація	—	Частота, Гц	0,01-30
		Амплітуда вібропереміщень, мм	0,075; 0,35; 0,75; 1,5; 3,5
		Амплітуда віброшвидкостей, м/с	0,02π; 0,06π; 0,1π; 0,3π
		Амплітуда віброприскорень, м/с ²	2,5; 5; 10; 15; 20; 30
Магнітне поле	—	Магнітна індукція, Тл	($\pm 1 \times 10^{-6}$) ÷ ($\pm 5,0 \times 10^{-4}$)
		Напруженість магнітного, А/м	(16); (80); (400)
		Амплітуда магнітної індукції змінного магнітного поля f до 400 Гц, Тл	(1×10^{-8} ÷ 1×10^{-5})
		Амплітуда напруженості змінного магнітного поля f до 400 Гц, А/м	(0,08; 0,8; 8)

Значення $\chi^2_{\alpha f}$ для різних значень α і f

f	Рівень значущості α					
	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01
1	0,00016	0,00098	0,0039	3,8	5,0	6,6
2	0,020	0,051	0,103	6,0	7,4	9,2
3	0,115	0,216	0,352	7,8	9,4	11,3
4	0,297	0,484	0,711	9,5	11,1	13,3
5	0,554	0,831	1,15	11,1	12,8	15,1
6	0,872	1,24	1,64	12,6	14,4	16,8
7	1,24	1,69	2,17	14,1	16,0	18,5
8	1,65	2,18	2,73	15,5	17,5	20,1
9	2,09	2,70	3,33	16,9	19,0	21,7
10	2,56	3,25	3,94	18,3	20,5	23,2
11	3,05	3,82	4,57	19,7	21,9	24,7
12	3,57	4,40	5,23	21,0	23,3	26,2
13	4,11	5,01	5,89	22,4	24,7	27,7
14	4,66	5,63	6,57	23,7	25,1	29,1
15	5,23	6,26	7,26	25,0	27,5	30,6
16	5,81	6,91	7,96	26,3	28,8	32,0
17	6,41	7,56	8,67	27,6	30,2	33,4
18	7,01	8,23	9,39	28,9	31,5	34,8
19	7,63	8,91	10,1	30,1	32,9	36,2
20	8,26	9,59	10,9	31,4	34,2	37,6

Значення G -критерію Кохрена при 5%-ному рівні значущості
($\alpha=0,05$)

f_n	f_u								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530	0,6333	0,6167
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5065	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535	0,3384	0,3259
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768	0,2659
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1736
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286	0,1216	0,1160
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1061	0,1002	0,0958
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583	0,0552	0,0520
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312	0,0292	0,0279
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Список літератури

1. Джонсон И., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке - М.: Мир, 1981. - 180с.
2. Володарский Е.Т., Малиновский Б.Н., Туз Ю.М. Планирование и организация измерительного эксперимента. - К.: Вища школа, 1987. - 157с.
3. Петрук В.Г., Володарський Є.Т., Монін В.Б. Основи науково-дослідної роботи. УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2006. - 143с.
4. Давиденко А.П. Организация и планирование научных исследований, патентоведение: Уч. пособие - Харьков, НТУ «ХПИ»: 2005. - 319с.
5. Зажигаев Л.С., Кишьян А.А., Романьков Ю.И. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента. - М.: Атомиздат, 1978. - 253с.
6. Грановский В.А., Сирая Т.Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. - М.: Энергоатомиздат, 1990. - 320с.
7. Захаров И.П. Обработка результатов измерений: Уч. пособие – Харьков: Изд-во Нац. уни-та внутренних дел, 2002. - 125с.

Навчальне видання

Конспект лекцій з курсу «Планування і обробка результатів експерименту» (для магістрів денної форми навчання спец. 8.090605 – «Світлотехніка і джерела світла»).

Автор: Леонід Андрійович Назаренко.

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2008, поз. 157 Л

Підп. до друку 21.12.07	Формат 60x84/16.	Папір офісний
Друк на ризографі.	Умовн.-друк.арк. 7,3	Обл.-вид.арк. 8,0
Замовл. № ____	Тираж 100 прим.	

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ,
61002, Харків, вул. Революції, 12